Određivanje optimalne biciklističke (turističke) rute primjenom Eulerovog ciklusa

Lovrić, Dorian

Undergraduate thesis / Završni rad

2020

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Rijeka, Faculty of Maritime Studies, Rijeka / Sveučilište u Rijeci, Pomorski fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:187:066148

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2024-09-21**

Repository / Repozitorij:

Repository of the University of Rijeka, Faculty of Maritime Studies - FMSRI Repository

SVEUČILIŠTE U RIJECI

POMORSKI FAKULTET

DORIAN LOVRIĆ

ODREĐIVANJE OPTIMALNE BICIKLISTIČKE (TURISTIČKE) RUTE PRIMJENOM EULEROVOG CIKLUSA

ZAVRŠNI RAD

Rijeka, 2020.

SVEUČILIŠTE U RIJECI

POMORSKI FAKULTET

ODREĐIVANJE OPTIMALNE BICIKLISTIČKE (TURISTIČKE) RUTE PRIMJENOM EULEROVOG CIKLUSA

DETERMINING THE OPTIMAL CYCLING (TOURIST) ROUTE USING THE EULER CYCLE

ZAVRŠNI RAD

Kolegij: Prometno inženjerstvo

Mentor: Dr. sc. Neven Grubišić, izv.prof.

Student: Dorian Lovrić

Studijski smjer: Tehnologija i organizacija prometa

JMBAG: 0112062836

Rijeka, rujan 2020.

Student: Dorian Lovrić

Studijski program: Tehnologija i organizacija prometa

JMBAG: 0112062836

IZJAVA

Kojom izjavljujem da sam završni rad s naslovom ODREĐIVANJE OPTIMALNE BICIKLISTIČKE (TURISTIČKE) RUTE PRIMJENOM EULEROVOG CIKLUSA izradio samostalno pod mentorstvom dr. sc. Neven Grubišića.

U radu sam primijenio metodologiju znanstvenoistraživačkog rada i koristio literaturu koja je navedena na kraju završnog rada. Tuđe spoznaje, stavove, zaključke, teorije i zakonitosti koje sam izravno ili parafrazirajući naveo/la u završnom radu na uobičajen, standardan način citirao sam i povezao s fusnotama i korištenim bibliografskim jedinicama. Rad je pisan u duhu hrvatskoga jezika.

Suglasan sam s objavom završnog rada na službenim stranicama Fakulteta.

Student

Dorian Lovrić

SAŽETAK

Prometna mreža predstavlja skup čvorova i veza koje se nalaze u prometu, a elementi mogu biti pješaci i prijevozna sredstva s ciljem da efikasno i sigurno provedu funkciju transporta. Problemi u prometnoj mreži mogu se riješavati pomoću teorije grafova. Graf pokazuje čvorove i veze s odgovarajućim paramterima koji su potrebni za postavljanje matrice. Matricom grafa označava se da li je veza između čvorova prisutna ili nije. Prema teoriji grafa za rješavanje orijentiranih ili neorijentiranih mreža koristi se Eulerov graf. Eulerov graf postoji ako su svi čvorovi parnog stupnja što znači da se svim čvorovima neparnog stupnja dodaje umjetni brid. Korištenjem algoritma za rješavanje problema kineskog poštara uz četiri koraka moguće je dobiti optimalno rješenje odnosno minimalno prijeđeni put.

Ključne riječi : čvorovi, Eulerov graf, linkovi, prometna mreža, transport

SUMMARY

Traffic network presents vertex and edges found in traffic with elements such as people and vehicles with goal to complete transport function with efficiency and safety. Problems in traffic network can be solved using graph theories. Graph shows vertex and edges with their parameters which are needed for setting up an matrix. The matrix shows if there is a connection between vertex and edge. In graph theories, problems with oriented and disoriented web can be solved by using Euler path. Euler path means that each vertex is even and odd vertex are getting pair up with artificial arc to make them even. Using algorithm for solving Chinese postman problem in four steps with result of getting optimal solution or minimal path crossed.

Keywords: edges, Euler path, edges, traffic network, transport, vertex

SADRŽAJ

1. UVOD

U zadnjih desetak godina bicikl kao prijevozno sredstvo pokazao se kao najčešći izbor pri istraživanju različitih zanimljivih područja. Bicikl kao takav vrlo je fleksibilan jer ne iziskuje potrebnu cestovnu infrastrukturu s toga je potrebno proučiti moguće puteve kroz koje se vežu znamenotosti. Na temelju prikupljenih saznanja i informacija stvorena je moguća prometna mreža za kretanje biciklom isključivo po prirodi. Takva prometna mreža i dalje ima svoja svojstva koja ju obilježavaju kao što su čvorovi odnosno destinacije te bridovi odnosno putevi. Potrebno je prikazati takav plan putovanja koji bi omogućio biciklistu da prođe svim turističkim stazama u definiranom području u što kraće vrijeme i da se pri tom vrati u početnu točku.

1.1. DEFINIRANJE PROBLEMA

Problem ovog istraživanja temelji se na određivanju optimalne rute koju bi biciklist mogao prijeći, a da pritom iskoristi priliku proći i zanimljivosti određenog područja. Za ovo istraživanje je izabran otok Rab kao odabrano područje gdje bi se mogle provesti biciklističke staze. Problem se može definirati da glasi tako da je potrebno izraditi rutu za biciklista, u ovom slučaju rekreativca koji će svaku granu tj. stazu proći bar jednom, a pritom da svoje putovanje započne i završi u istome čvoru.

1.2. CILJ I SVRHA ISTRAŽIVANJA

Cilj i svrha istraživanja je pronaći i osmisliti biciklističku stazu koja će objediniti kultune znamenitosti na području otoka Raba te je grafički prikazati.Cilj je pronaći najkraći mogući put kojim će se obići sve znamenitosti, a da put počne i završi u istom čvoru koristeći algoritam za rješavanje problema kineskog poštara.

1.3. ZNANSTVENE METODE RJEŠAVANJA PROBLEMA

Kako bi se napisao ovaj završni rad i riješio problem korištene su metode koje se koriste kod znanstveno istraživačkih radova, a čiji je cilj bio prikupiti što veći broj podataka potrebnih za završni rad. Korištene su metode analize i sinteze, matematičke metode i metoda dedukcije. Osim navedenih metoda korištene su i metode koje su se odnosile direktno na problem, a to su teorija grafova, metode operacijskih istraživanja, matematičke metode optimizacije i heuristički algoritmi.

1.4. STRUKTURA RADA

Završni rad strukturno se sastoji od dva dijela, teoretskog i praktičnog. Teoretski dio je podijeljen na 5 poglavlja. U prvome poglavlju se predstavlja što je to prometna mreža, kakve sve mreže mogu biti i koji su dijelovi mreža. U drugome poglavlju je prikazano kako je nastao bicikl kao prijevozno sredstvo te od čega se sastoji bicikl kako bi mogao funkcionirati. U trećem poglavlju je objašnjeno što su to grafovi i osnovne pojmove vezane za grafove te vrste gibanja po grafu. Četvrto poglavlje se sastoji od metoda optimizacije prijevoza na mreži prometnica te su objašnjene vrste algoritma za rješavanje problema kineskog poštara. U konačnici će se uz pomoć grafova prikazati problem kineskog poštara na jednoj biciklističkoj ruti na otoku Rabu.

2. RAZVOJ BICIKLA KROZ POVIJEST

Ocem prvog bicikla smatra se Karl Freiherr Von Drais koji je 12. Lipnja, 1817. Godine prvi puta sjeo na spravu koja je imala dva drvena kotača koja su bila međusobno povezana drvenom ramom. Sprava je bila nalik dječjim guralicama koje danas susrećemo u svakodnevnom životu, samo Karlova je bila namijenjena za odrasle osobe, ali karakteristike su ostale iste, nije imala pedale, kočnice ni mačje oči. Prvi bicikl nije odmah zauzeo ime bicikl već je dobio ime „Drasaine“. Karl je studirao arhitekturu, radio je u šumarstvu točnije voditelj šumara gdje ga je zaposlio ujak. Želja za nečim novim, čime će zamijeniti jahanje konja, a ujedno možda i stvoriti bogatstvo, Karl koji je tada imao trideset godina stvara izum kojeg se danas poznaje kao bicikl.(1)

Prvu vožnju Karl je isprobao na lokaciji Mannheim, na spustu oko čak 14 kilometara, što je za prvi puta impresivno. Prvoj vožnji svjedočili su i mnogi gledatelji koji su nakon probne vožnje doslovno poludili za njegovim izumom. Čitava Europa pisala je o njegovu izumu čija je cijena tada bila tek 20 funti, iako se Karl nije obogatio, naveo je ljude da razmišljaju o lokacijama na koje bi mogli putovati biciklom, istraživati neistraženu prirodu.(2)

Danas, Drasaine, još uvijek postoji i nalazi se u muzeju Paleis het Loo u Nizozemskoj.

Nakon Što je izum patentiran pojavile su se i konkurencije. Francuska, Njemačka, Engleska pokušale su kopirati izum te se pojavljuje famozni velociped, bicikl s prednjim velikim kotačem i minijaturnim stražnjim koji je imao i pedale. S godinama bicikl se usavršavao te je s vremenom dobivao kočnice, lanac, pneumatike. Bicikl se tek krajem 19. Stoljeća počeo nalikovati današnjem biciklu ali njegova osnovna namjena i dalje ostaje ista. Karl je umro 10. Prosinca 1851. Godine a iza sebe ostavio je veliki utisak u povijest biciklizma. (2)

Slika 1 : Karl Freiherr

Izvor : Wikipedia (13.2.2020.)

https://hr.wikipedia.org/wiki/Bicikl

Slika 2 : Velociped

Izvor : Muzej za umjetnost i obrt (13.2.2020.)

https://dms-cf-06.dimu.org/image/0331xxKUXhSD?dimension=600x600

2.1 ANATOMIJA BICIKLA

Slika 3 Bicikl sa označenim dijelovimaIzvor : Rog joma (15.2.2020.)

https://www.rog-joma.hr/hr/blog/biciklizam-pocetnici-anatomija-dijelovi-bicikla/

Rama predstavlja okvir bicikla što je ujedno čini i najvažnijim dijelom bicikla. Ako rama nije dobra tada će se sve nepravilnosti odraziti na ostalim komponentama. Visina rame mjeri se od sredine pogona do ulaska cijevi u sjedala u ramu. Da bi odabrali odgovarajuću veličinu za nas potrebno je pozabaviti se s malo matematike, odnosno ovisi o našoj visini mjeriti idealnu veličinu za nas.(3)

U početku vilice su bile zakrivljene zbog udobnosti vožnje, no danas zbog korištenja novih materijala udobnost više nije problem, iz tog razloga vilice na biciklima su ravne jer takva struktura poboljšava upravljanje i stabilnost u zavojima.(3)

Slika 4 : Vilice bicikla

Izvor : Rog joma (15.2.2020.)

https://www.rog-joma.hr/fajlovi/slike_cms/vilice-za-bicikl.jpg

Amortizeri se u pravilu nalaze na brdskim te ponekad na treking biciklima, no bitno je ta su ti amortizeri kvalitetni inače će stvarati više nekvalitetnih nego kvalitetnih osobina. Zadatak amortizera je smanjiti vibracije nastale neravnom podlogom, većina jeftinih amortizera nakon prelaska preko nepravilne podloge maksimalnom brzinom vraća i početni položaj vilica, isto tako jeftini amortizeri na sebi imaju klizače koji brzo propadaju i gubi se njihova funkcija te servis takvih amortizera je učestao.(3)

Bicikli mogu imati prednje i zadnje amortizere ilii punu suspenziju koja radi u centralnoj ravnini simetrije. Krutost, prigušenje, elastičnost i prijanjanje jedini su od osnovnih parametara svih amortizera, tako današnji amortizeri imaju podesiv hod, podešavanje tvrdoće, kompresije, rebounda i opciju zaključavanja zbog lakšeg savladavanja uspona. Kod vožnje uzbrdo je potrebno imati kontinuirani i čvrsti oslonac kojeg omogućuju krute vilice.

Iako se sjedalo prilikom kupnje već nalazi na biciklu, te ga kao takvog tvorničkog većina smatra optimalnim izborom, ali ima onih koji njime nisu zadovoljni te se često odlučuju za drugi izbor. Uže sjedalo je bolje kod sportskih bicikla, dok što smo uspravniji u vožnji, gradska vožnja, trebat će nam šire sjedalo.(3)

Slika 5 : Sjedala za biciklu

Izvor : Sports in cycling (15.2.2020.)

https://sportsincycling.com/wp-content/uploads/2017/11/Screen-Shot-2017-11-10-at-1.44.37-PM-1024x683.png

Duljinom lule se definira prilagođenost veličine bicikla ali i lakoću njegovog upravljanja. Ako su kratke, biciklisti izuzetno teže kontroliraju smjer bicikla, a one preduge lule čine bicikl nedovoljno okretnim. Zato bi duljinu lule trebalo uskladiti s veličinom okvira, odnosno duljinom trupa vozača.(3)

Slika 6 : Lula volana

Izvor : Bicikla.hr (15.2.2020.)

https://www.bicikla.hr/wp-content/uploads/2017/07/Lula-volana-ACOR-31.8x100-35-ASM-2404-experience-matulji.jpg

Što se tiče upravljača, ono obično dolazi u tri oblika: ravna, blago zakrivljena i u obliku roga koja su trkaća. Krajevi kormila su obično savijeni prema vozaču a savijanje upravljača najčešće je u samome centru. Upravljači u obliku roga su rezervirana za trkaće bicikle i kao takva omogućavaju nekoliko položaja ruku i samim time su najudobniji i najfleksibilniji oblik koji je moguće koristiti na biciklima. Na upravljaču se nalaze navlake najčešće napravljene od pjenastog umjetnog materijala ili pluta koje daju udobnost dlanovima prilikom vožnje.(3)

Slika 7 : Oblici volana

Izvor : Rog joma (15.2.2020.)

https://www.rog-joma.hr/fajlovi/slike_cms/kormilo-za- bicikle.png

Kočnice su vjerojatno i najbitnija stavka koje čini bicikl kvalitetnim prijevoznim sredstvom.

Postoje različite vrste kočnica :

1. Torpedo kočnice : standardna oprema cruiser i bicikla za svakodnevnu upotrebu. Prednost torpeda je njegova jednostavnost i pouzdanost u svim vremenskim uvjetima te njegovo jednostavno održavanje. Nedostatak je taj što se nalazi na zadnjem kotaču pa ne dozvoljava naglo zaustavljanje te kao posljedica učestalo pada lanac s lančanika ili puca.

2. Caliper : ovaj tip kočnice može biti hidraulični ili mehanička verzija kočnice, a svima im je zajedničko da se aktiviraju preko ručice kočnice na upravljaču. Sila kočenja preko sajle ili fluida prenosi na čeljust kočnice gdje kočione pločice svojim oslanjanjem na rub obruča ostvaruju silu kočenja.
3. Cantilever kočnice : najpopularnija su izvedba u V obliku. Karakterizira ih pouzdanost, jednostavnost, lakoća i velika sila kočenja. Da bi se ostvarilo kvalitetno kočenje ulogu ima i sam obruč koji mora biti ravan i centriran. Prednost ovog tipa je u velikoj sili kočenja dok nedostatak nailazimo u mokrim uvjetima kad se zbog mokrog obruča sila kočenja umanjuje čak i do 60%.
4. Disk kočnice : mogu biti mehaničke i hidrauličke verzije. Mehaničke disk kočnice jeftinije su od hidrauličkih ali ostvaruju slabiju silu kočenja i slabiju modulaciju, no mogu se ugraditi s postojećim ručicama za V-kočenje. Kod hidrauličkih kočnica je stvar malo kompliciranija, potrebna je kompatibilnost između ručica kočnice, uljne cijevi, čeljusti diska i rotora kočnice. Prednost hidrauličkih kočnica je i velikoj sili kočenja, moguće je dozirati jačinu kočenja, izdržljive su na visoke temperature te kao takve njihova cijena je jedini nedostatak.(3)

Slika 8 : Vrste kočnica

Izvor : Rog joma (15.2.2020.)

https://bicyclethailand.com/wp-content/uploads/2010/11/brake-types.jpg

Kotači su isto tako bitan faktor kod kvalitete bicikla, a ima ih u različitim oblicima i karakteristikama. Tako uži kotači imaju manju inerciju pa se bolje ponašaju pri većim brzinama i promjenama smjera. Oni su tako brži, a šire gume su zbog stabilnosti i boljeg prijanjanja pogodnije za gradski i brdski biciklizam. Pogodno za trkaće bicikle, kotači s višim profilom felge i manjim brojem žbica jer ih to čini aerodinamičnijima. U toj priči biciklizma upotrebljavaju se proizvodi od karbona koji su kvalitetni te isto tako i skupi. Karbonska felga zahtijeva i posebne gumice kočnica zbog efikasnijeg kočenja ali isto tako karbonska vlakna imaju manu kod toplice što se vidi kod kiše kada bicikl postaje nepredvidiv.(3)

Slika 9. : Vrste kotača

Izvor : Rog joma (15.2.2020.)
https://www.rog-joma.hr/fajlovi/slike_cms/kotaci-za-bicikle_2017-03-20_10-59.png

3. PROMETNA MREŽA I MREŽNO PLANIRANJE

Sistem u prostoru na kojem se odvijaju procesi poput prometa, prijevoza i komunikacije naziva se prometna mreža. Temeljni elementi prometne mreže su pješaci, vozila te ostale jedinice kojima je zadatak promjena mjesta robe, vijesti, ljudi i misli. Osnovna funkcija prometne mreže je osiguravanje efikasnog, sigurnog, troškovno i ekološki prihvatljivog premještanja robe, ljudi i informacija od izvorišta do odredišta.(5)

3.1 OSNOVNI POJMOVI U PROMETNIM, PRIJEVOZNIM I INFORMACIJSKIM MREŽAMA

Riječ mreža se može protumačiti na više načina te može imati više značenja kao što su sistemi linija, kablova, cesta koji se spajaju. Također mreža može označavati skup računala zajedno sa svojom pripadajućom opremom koja osigurava razmjenu informacija. Mreža označava i skup televizijskih i radijskih stanica koje emitiraju isti programski sadržaj te označava matematički koncept povezanost u topološkim strukturama i grafove.

Mreža može biti prometna, prijevozna ili komunikacijska te predstavlja strukturu čvorova i veza odnosno linkova, a kojima se pridružuju težine. Osim čvorova i veza, koncept mreže sadržava i terminale te čvorišta sa linkovima. Terminali koji se nalaze na mreži označavaju pristupni dio mreže gdje prometne jedinice ulaze tj. izlaze. Funkcija terminala je da obavlja i druge funkcije poput izdavanje i naplata karata za vožnju, informiranje, sadržava čekaonice, skladišti robu. Terminali koji su dio transportnog sistema se nalaze na pristupnom dijelu gdje ulaze i izlaze putnici tj. na mjestu gdje se ukrcava i iskrcava roba u kontejnere ili vozila.

Čvorovi su elementi u mreži u kojima se križaju, koncentriraju, slijevaju ili odlijevaju prometni tokovi aviona, brodova, vozila ili drugih jedinica. Obavljaju se i funkcije propuštanja jedinica do složenijih procesa kao što su usmjeravanje, skladištenje, naplata karata i informiranje. Čvorovi mogu biti gradovi, aerodromi, autobusne stanice, pošte i drugo. Obilježje čvorova odnosno čvorišta je da se naizmjenično koristi kapacitet dok se razdjeljivanje tokova provodi u vremenskim, prostornim dimenzijama. Linkovi se još nazivaju grane ili veze, a služe da međusobno povezuju čvorove u prometnoj mreži te se koriste za fizički transport bez ikakvih dodatnih usluga. Linkovi tj. grane mogu biti ceste, ulice, zračni putevi i drugo. Svakoj grani grafa u stvarnosti treba biti pridružen realan broj koji može označavati udaljenost, kapacitet, vrijeme putovanja.(6)

Prema (6) izvor ili „*source*"označuje mjesto, objekt koji generalizira prijevoz, kretanja ili podatke za slanje. Odredište ili „*destination*" je objekt koji služi da prihvaća prijevoz, kretanja ili podatke koji dolaze od izvora.

3.2 USLUGE PROMETNIH MREŽA

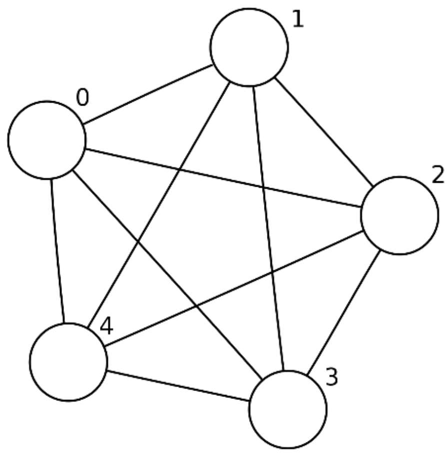
Usluge prometne mreže mogu se promatrati kao usluge koje pojedini elementi u mreži pružaju uz usluge kompletne mreže, a usluge mogu biti kretanje vozila na dionici prometnice, usluge raskrižja, usluge puta u prometnoj mreži te usluge terminala u prometnoj mreži. Cilj promjene mjesta robe i ljudi se ostvaruje kretanjem prijevoznih sredstava u mreži prometnica. Usluge prijevoznih i prometnih mreža se odnose na usluge koje provode utovar, istovar kao i za usluge koje provode ulaz i izlaz putnika u vozila i iz vozila definiraju se uslugama prijevoznih i prometnih mreža.

4. TEORIJA GRAFOVA I MREŽA

Teorija grafova je dio matematike kojoj je temelje dao Leonhard Euler, švicarski matematičar u prvoj polovici 18. Stoljeća. Teoriju grafova nije teško primijeniti u stvarnom životu te se koristi kod riješavanja problema u mrežama. Teorija grafova je zasnovana na topološkim principima koji potom omogućavaju riješavanje praktičnih i teoretskih zadataka.

4.1 OSNOVNI POJMOVI U TEORIJI GRAFOVA

Prema (6) graf se može definirati kao uređeni par skupova (V,E) u kojem V označava skup vrhova dok je E skup veza odnosno bridova. Osim što sadržava graf vrhove i bridove, može sadržavati i petlje, višestruke bridove i usmjerene bridove i tada se kaže da je definicija grafa proširena.



Slika 10 Potpuni graf

Izvor : Wikipedia (1.9.2020.)

Grafovi prema vrsti bridova mogu biti usmjereni ili neusmjereni. Bridovi koji su usmjereni su bridovi sa orijentacijom od jednog vrha prema drugome vrhu te tako predstavljaju uređene parove. Ukoliko graf ima usmjerene bridove zove se digraf tj. usmjereni graf dok graf koji sadrži višestruke bridove se naziva multigraf, no multigraf ne dozvoljava petlje u svojim grafu. A ako se ne označuje kakav je graf, koristi se ime jednostavni graf.

Grafički prikaz služi za opis grafa, a on mora biti prikazan na način da se iz njega može rekonstruirati formalni zapis grafa oblika (V,E). Ukoliko su zadani vrhovi grafa i ako se zna koji se vrhovi mogu međusobno povezati smatra se da je graf zadan. Graf se može smatrati kao binarna relacija susjedstva koji se nalazi na skupu vrhova, a gdje se kaže da su dva vrha susjedna ako postoji brid koji ih onda spaja. Kod jednostavnih grafova ta ista relacija je simetrična i refleksivna. Grafovi mogu biti : potpuni graf, graf kod kojeg svaki par vrhova sadrži brid te nul graf u kojem ne postoje bridovi. Potpuni i nul graf s n vrhova se označavaju s K_n i N_n.

Vrh v je incidentan sa bridom e ako je $e = \{*, v\}$ ili $e = \{v,*\}$. Isti graf se može prikazati grafički na razne načine. Za dva grafa G_1 i G_2 se može reći da su ista tj. izomorfna ako se mogu označiti vrhovi oba grafa na isti način te uz to da za svaki par u, v vrhova koji je označen, broj bridova koji spajaju u i v u G_1 je isti broju bridova koji u i v spajaju u G_2.(6)

Podgraf ili subgraf grafa *G=(V,E)* je graf kojem skup bridova i skup vrhova označavaju podskupovi od V i E. Ako *G'=(V',E')* označava podgraf od *G* onda za svaki brid $e \in E'$ vrijedi da su oba vrha u *V'*. Subgraf ili podgraf se dobiva isključenjem određenih čvorova zajedno sa njihovim incidentnim granama. Mogu se razlikovati dvije vrste podgrafova, a to su inducirani i razapinjajući podgraf. Razapinjajući podgraf označava podgraf oblika $G' = (V, E')$. Svaki graf koji sadržava najviše *n* vrhova označava podgraf od K_n, a graf sa točno *n* vrhova označuje razapinjajući podgraf od K_n i svi podgrafovi koji su inducirani od K_n su potpuni grafovi.(6)

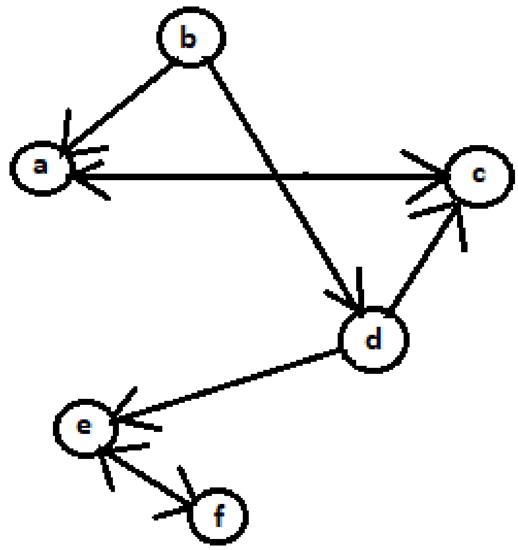
Parcijalni graf orijentiranog grafa $G = (V, E)$ je orijentirani graf $G_1(V, E_1)$ kod čega je E_1 podskup skupa *E* odnosno kod čega je $E_1 \subset E$. Kako bi se parcijalni graf orijentiranog grafa dobio trebaju se isključiti određene grane orijentiranog grafa.(6)

Kretanje ili šetnja kroz graf je konačan slijed bridova $(v_0, e_1, v_1, e_2;\ v_2, \ldots;\ e_n, v_n)$ u kojem je e_1 brid $\{v_{i-1}, v_i\}$, za *i =1,...,n.* Smatra se da je to kretanje od v_0 do v_n. Broj bridova u nizu označuje dužinu kretanja. Ukoliko je $v_n = v_0$ kretanje se smatra zatvorenim. Kod jednostavnog grafa se smatra da su za jedan brid vrhovi $v_{i-1}\ i\ v_i$ susjedni. Kako bi se prikazalo gibanje po grafu potrebno je utvrditi što je to šetnja između vrhova grafa. Postoje različite vrste kretanja po grafu, mogu biti staza, put ili ciklus. Staza se odnosi na kretanje u kojemu su različiti svi bridovi. Put označava kretanje u gdje su svi vrhovi različiti, no prvi i zadnji mogu biti isti. Ciklus grafa označava zatvoreni put.

Najčešće osim osnovnih informacija u grafu se nađu i dodatne informacije te tako brid može predstavljati prometnicu ili komunikacijski kanal dok je njemu pridružen njegov kapacitet. Grafovi koji imaju dodatne kapacitete tj. informacije opisuju se pomoću težinskih funkcija. Težinska funkcija na skupu X je funkcija s X u R. Graf sa težinskom funkcijom se još naziva bridno-težinski graf.

4.2 GIBANJE PO GRAFU

Ukoliko se radi o usmjerenom grafu tj. orijentiranom, potrebno ga je opisati na matematički način te također koristiti matricu susjedstva (težinska matrica), listu bridova (veza) i listu susjedstva.



Slika 11 Usmjereni graf

Izvor : izradio student u programu Paint (12.9.2020.)

Matematički se graf prikazuje sljedeći način : $G = (V,E)$, V označava skup vrhova, a E označava skup veza odnosno bridova. Elementi (u,v) su uređeni parovi kod usmjerenog grafa, dok kod neusmjerenog grafa je $(u,v)=(v,u)$.

Nakon matematičkog prikaza grafa, potrebno je graf opisati matricom susjedstva, a matrica susjedstva MS (VxV) je matrica kod koje svaki element ima vrijednost 1 ili 0, a to označava da li je prisutna veza ili nije. Kod neusmjerenog grafa matrica susjedstva je simetrična.

Primjer 1 Predstavljanje usmjerenog grafa

MS =

	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*
a	0	0	1	0	0	0
b	1	0	0	1	0	0
c	1	0	0	0	0	0
d	0	0	1	0	1	0
e	0	0	0	0	0	1
f	0	0	0	0	1	0

Nakon matrice susjedstva se radi lista susjedstva (LS) koja sadrži listu izlaznih veza tj. bridova.

LS =

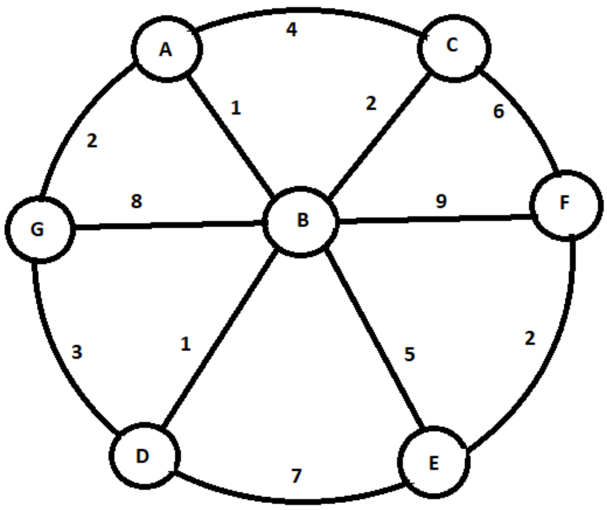
a		
b	a	d
c		
d	c	e
e	f	
f	e	

Lista veza ili bridova (LV) sadrži sve veze/bridove u jednom slijedu.

$LV = (b,a),(a,c),(c,a),(b,d),(d,c),(d,e),(e,f),(f,e)$

Kod neusmjerenog odnosno neorijentiranog graf potrebno je odrediti puteve koji se nalaze u grafu. Određivanje najkraćeg puta između čvorova A i C moguće je određivanjem udaljenostima između čvorova.

Primjer 2 Predstavljanje neusmjerenog grafa



Slika 12 Graf sa udaljenostima između čvorova

Izvor : izradio student u programu Paint (12.9.2020.)

Tablica br. 1 Udaljenosti između čvorova u grafu

Čvorovi	A	B	C	D	E	F	G
A	0	1	4	0	0	0	2
B	1	0	2	1	5	9	8

C	4	2	0	0	0	6	0
D	0	1	0	0	7	0	3
E	0	5	0	7	0	2	0
F	0	9	6	0	2	0	0
G	2	8	0	3	0	0	0

Tablica br. 2 Mogući putevi u grafu

Put	**Udaljenost**	**Put**	**Udaljenost**
A→B→G→D→E→F→C	= 27	A→G→D→B→F→C	= 21
A→G→B→E→F→C	= 23	A→B→F→C	= 16
A→G→B→C	= 12	A→G→D→B→E→F→C	= 19
A→B→D→E→F→C	= 17	A→G→D→E→F→C	= 18
A→G→D→E→B→C	= 19	A→B→D→E→F→C	= 17
A→C	= 4	A→G→B→D→E→F→C	= 26
A→G→D→E→B→F→C	= 28	A→G→B→F→C	= 25
A→G→D→B→C	= 8	A→G→D→E→F→B→C	= 19
A→B→C	**= 3**		

Iz tablice br. 2 se može zaključiti da je najkraći put od čvora A do čvora C, put A→B→C = 3.

5. METODE OPTIMIZACIJE PRIJEVOZA NA MREŽI PROMETNICA

Kako bi transport bio optimalan bitno je kod prijevoza putnika i robe na mreži prometnica pridodati svu važnost obavljanju zadatka prijevoza uz minimalne troškove, maksimalnu sigurnost, minimalni utjecaj na okoliš te maksimalnu kvalitetu usluge. Često se u praksi postoje zadaci koji zahtijevaju da prijevozno sredstvo obavi prijevoz kretanjem se svim dionicama prometnica u mreži prolazeći pri tome svakom dionicom jedanput. Prometnice se mogu razlikovati po vrstama dionica koje mogu biti jednosmjerne i dvosmjerne dionice s tim da dužine pri odlasku i povratku ne moraju biti iste.

Određivanjem najkraćeg puta u mreži kojim se vozilo kreće ili vozila prolaze sve dionice minimalno jedanput i da svoju obavezu vozilo završi na određenom mjestu smatra se planom rada jednog ili više prijevoznih sredstava. Primjer plana takvog rada u prometnoj mreži može se usporediti s planom čišćenja ulica u gradskoj mreži ili primjerom poštara, kojom putanjom se poštar treba kretati pri nošenju pošte. Problem određivanja najkraćeg puta u mreži u kojoj se sve dionice prolaze minimalno jedanput može se riješiti postupkom poznatim pod nazivom „ problem kineskog poštara “.

Osim problema kineskog poštara u prijevozu se također mogu sresti problemi kada prijevozno sredstvo treba proći kroz određena mjesta na mreži bar jednom s tim da se minimizira prijeđeni put te se takva vrsta problema naziva „ problemi pokrivanja čvorova “ te se rješavaju postupkom rješavanja problema „trgovačkog putnika “ Primjer takvog problema može se usporediti sa distributerima robe jednog tržišnog centra prema određenim lokacijama u mreži. Problem trgovačkog putnika se odnosi na : avione, brodove, kamione, autobuse, posade itd. U čvorištima koje prijevozno sredstvo posjećuje mogu se isporučiti ili preuzimati roba ili putnici.

5.1 PROBLEMI PLANIRANJA RADA PRIJEVOZNIH SREDSTAVA NA PROMETNIM MREŽAMA

Može se reći da većina organizacijskih problema u prijevozu putnika i robe na prometnim mrežama spada u probleme koji mogu biti :

- Nizanja
- Raspoređivanja

- Izbor
- Kombinacija navedenih problema

Problem nizanja može se riješiti na način da se odredi niz od *n* elemanata pri kojem funkcija cilja dostiže ekstremnu vrijednost koja može biti minimum ili maksimum. Primjer koji se odnosi na problem nizanja je poznat kao problem „trgovačkog putnika“ čiji je cilj da obiđe sve gradove samo jednom uz to da prevali najkraći put i na kraju da se vrati upravo u onaj grad odakle je putovanje započeo.

Problem raspoređivanja može se opisati na način da se izvrši raspoređivanje *n* elemenata jednog skupa na *n* elemenata drugog skupa pri čemu funkcija cilja dostiže ekstremnu vrijednost. Primjer u prijevozu je izrada rasporeda rada *n* vozila i *n* vozača.(6)

Problem izbora označava da treba izabrati *n* elemenata iz skupa *m* elemenata (n<m) pri čemu će funkcija cilja dostići ekstremnu vrijednost. Izbor lokacija *n* baza od *m* lokacija a da nulti prijeđeni put koji se odnosi na put od mjesta početka rada do mjesta završetka rada bude minimalan.(6)

Kombinacije prijašnje navedenih problema mogu biti brojne te je zato bitno da se izradi red vožnje, plovidbe ili letenja kako bi putnici pri presjedanju čekali minimalno. Problem kineskog poštara se primjenjuje kada prijevozna sredstva u prometu prolaze svim granama, dok se kretanje kroz čvorove u mreži odnosi na problem trgovačkog putnika. U različitim prometnim granama javljaju se različiti modificirani prometni problemi, svi ovi problemi su vrlo slični i rješavaju se istim ili sličnim metodološkim postupkom. Osim mogućeg rješavanja problema u prijevozu na prometnim mrežama klasičnim metodama matematičkog programiranja moguće je riješiti problem metodama heurističkih procedura.

5.2 PLAN PUTANJE PRIJEVOZNOG SREDSTVA KOJE KROZ SVE GRANE NA MREŽI PROLAZI NAJMANJE JEDNOM

Određivanje najkraćeg puta u mreži kojim bi se vozilo kretalo tako da sve grane mreže prijeđe najmanje jednom i da se vozilo na kraju vrati u čvor iz kojega je krenulo predstavlja optimalni plan rada jednog prijevoznog sredstva na mreži. Kod rada poštara prilikom dijeljenja pošte izrađuje se plan putovanja poštara na način da poštar mora obići sve ulice uz minimalno kretanje pri čemu svaku ulicu mora obići bar jednom. Navedeni problem može se riješiti postupkom poznatim pod nazivom „problem kineskog poštara“.

Problem kineskog poštara može se primjeniti na orijentiranim i neorijentiranim mrežama, mogu se opisati kao : Neorijentirana mreža G(N,A) I $(i, j) > 0$, $(i,j) \in A$. Potrebno je odrediti ciklus kojim je moguć prolazak kroz sve grane mreže G najmanje jednom i za koji vrijedi : $\sum s_{ij}$. l $(i,j) \rightarrow (i,j) \in A$, gdje su s_{ij} broj prolazaka kroz granu (i,j).

Pronalazak najkraće rute na usmjerenoj ili neusmjerenoj mreži smatra se konačnim rješenjem problema kineskog poštara. Kako bi se riješio problem kineskog poštara potrebno je znati određe pojmove te pojmovi koji su bitni za dobivanje rješenja problema su:

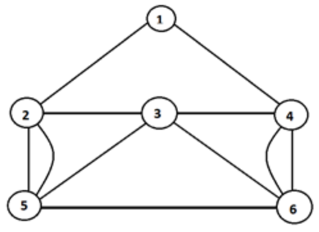
1. Euler-ova tura - ciklus kojim se svaka grana u mreži prolazi točno jednom.

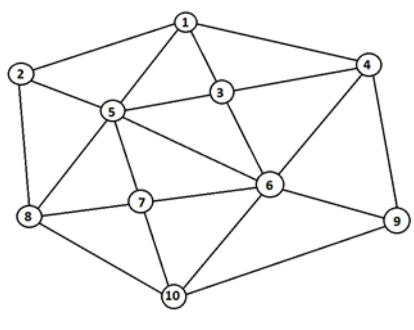
2. Euler-ov put - put kojim se kroz svaku granu u mreži prolazi točno jednom.

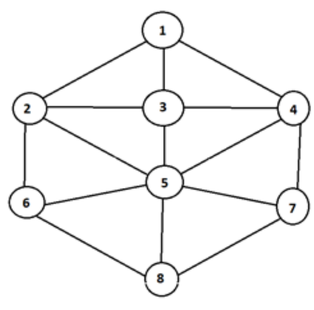
5.3 ALGORITAM ZA RJEŠAVANJE PROBLEMA KINESKOG POŠTARA NA NEORIJENTIRANOJ MREŽI

Prema Euleru povezana neorijentirana mreža G posjeduje Eulerovu rutu samo ako mreža G ima točno nula čvora neparnog stupnja.

Na (slici br. 15) prikazana je mreža koja nema čvorove „neparnog stupnja“, zbog čega posjeduje Eulerovu rutu, odnosno ciklus (2,5,2,3,5,6,3,4,6,4,1,2).







Slika 13 Mreža sa Eulerovom turom Slika 14 Mreža sa Eulerovim putem Slika 15 Mreža bez Eulerove ture i puta

Izvor slika 13, 14, 15 : izradio student u programu Paint (12.9.2020.)

Ukoliko mreža posjeduje čvorove neparnog stupnja tada se za nju kaže da je mreža bez Eulerove ture i puta, dok kod povezane i neorijentirane mreže koja ne posjeduje čvorove neparnog stupnja mogu se naći različite Eulerove ture.

Ukupna dužina različitih Eulerovih tura se računa prema izrazu koji glasi : $\sum l(i,j)$ za sve $(i,j) \in A$.(6)

Mehanović M. objašnjava korake algoritma za rješavanje problema kineskog poštara, a koraci su sljedeći. Prvi korak u algoritmu je da se trebaju pronaći čvorovi neparnog stupnja. U mreži $G(N,A)$ se pronalaze čvorovi neparnog stupnja, njihov broj je k, a *k* je paran broj. Sljedeći korak u algoritmu je da se nađu najkraći putevi tako da se pronađu *k/2* parova čvorova tako da je ukupna dužina bridova između tih čvorova minimalna. Treći korak je da se dodaju umjetni bridovi na način da se za svaki od *k/2* parova čvorova dodaju umjetni bridovi koji su paralelni već postojećim bridovima na najkraćem putu između dva čvora te tako novi graf $G^{\cdot}(N,A^{\cdot})$ nema čvorove neparnog stupnja. Četvrti i zadnji korak u riješavanju problema kineskog poštara sa algoritmom glasi da se pronađe optimalna tura odnosno Eulerova tura u mreži $G^{\cdot}(N,A^{\cdot})$. Pronađena Eulerova tura se smatra optimalnim rješenjem problema kineskog poštara kod originalne, prve mreže. Kako bi se izračunala ukupna dužina optimalne ture uzima se u obzir zbroj svih dužina bridova mreže $G(N,A)$ te dužina *k/2* najkraćih puteva između već ustanovljenih *k/2* parova čvorova koji su u prijašnjoj mreži bili čvorovi neparnog stupnja.

Prilikom spajanja je potrebno znati da ne postoje dva najkraća puta koja u svojem sastavu sadržavaju jednu zajedničku granu. Također prilikom spajanja bez računala treba se eliminirati veći broj mogućih spajanja čvorova neparnog stupnja na način da se spajaju čvorovi neparnog stupnja sa drugim čvorovima neparnog stupnja u neposrednoj blizini odnosno susjedstvu.(6)

5.4 ALGORITAM ZA RJEŠAVANJE PROBLEMA KINESKOG POŠTARA NA ORIJENTIRANIM MREŽAMA

Problem kineskog poštara na orijentiranim mrežama rješava se primjenom teorema koji glasi: „Povezane orijentirane mreže posjeduju Euler-ovu turu ako i samo ako je ulazni stupanj svakog čvora jednak izlaznom stupnju toga čvora“.
Polaritet čvora označava razliku između ulaznog i izlaznog stupnja čvora. Polariteti čvora

mogu se razlikovati prema : - čvorovi sa pozitivnim polaritetom (s_j) nazivaju se čvorovi sa ponudom (n_j).

-čvorovi sa negativnim polaritetom (d_k) nazivaju se čvorovi sa potražnjom (m_k).

Algoritam za rješavanje problema kineskog poštara na orijentiranim mrežama ima sljedeće korake: Prvi korak sastoji se od pronalaska čvorova negativnog i pozitivnog polariteta odnosno potrebno je pronaći sve čvorove s ponudom (n_j) i potražnjom (m_k). U drugom koraku cilj je pronaći najkraće puteve, a nalazu se najkraći putevi (d_{jk}) između čvorova (n_j) i (m_k). U trećem koraku spajaju se čvorovi ponude sa čvorovima potražnje metodom linearnog programiranja s funkcijom cilja:

$$Z = \Sigma_j \ \Sigma_k \ (d_{jk} \ \cdot x_{jk} \ ) \rightarrow min$$

Uz uvjet

$$\Sigma_k x_{jk} = \ s_j \text{ za svako j}$$

$$\Sigma_j \ x_{ij} = \ d_k \text{ za svako k}$$

$$x_{jk} \ \geq 0$$

Nakon spajanja čvorova ponude sa čvorovima potražnje slijedi četvrti korak koji se sastoji od pronalaženja mreže s polaritetom svih čvorova jednakim 0. Neka nova mreža G` ima polaritet svih čvorova jednak nuli a dobiva se tako što se za svako rješenje $x_{jk} \ \geq 0$ dodaje $x_{jk}$ umjetnih bridova koji su paralelni najkraćem putu od ($n_j$) prema ($m_k$). U zadnjem koraku pronalazi se optimalna ruta odnosno pronalazi se Euler-ova ruta u mreži G` te ona predstavlja optimalno rješenje problema kineskog poštara prvobitne mreže G (N,A).

5.5 LINGO SOFTVER

Osim što se problemi za nalaženje optimalne rute u kojoj će se svaki brid prijeći minalno jedanput, odnosno optimalne rute sa minimalno prijeđenim putem mogu riješiti matematičkim algoritmima, također postoji program koji rješava takve probleme, a naziva se Lingo program.

Kako kod linearnog programiranja realni problemi imaju velik broj ograničenja koji se mijenjaju potrebni su odgovarajući programi na računalu tj. softveri kako bi se odredili njihova optimalna rješenja. Softveri koji su namijenjeni riješavanju realnih problema linearnog programiranja najčešće rade na temelju simpleks metoda uz to što neki softveri mogu prikazat svaku od iteracija. Nakon unosa podataka, klasičan PC softverski paket automatski prikazuje optimalnu vrijednost funkcije cilja te optimalne vrijednosti promjenjivih funkcija cilja. Također velika većina paketa odrađuje automatski analizu osjetljivosti.

Lingo softver sadrži kolonu *Reduced cost* koji označava cijene u sjenci. Dijelovi te kolone prikazuju koliko se može prihod povećati sa jediničnim povećanjem promjenjivih vrijednosti modelu (x_1 i x_2). Dijelovi kolone *Reduced cost* se može protumačiti na sljedeći način, a to je da vrijednosti koje su navedene u koloni prikazuju koliko je moguće smanjiti koeficijente koji su u funkciji cilja uz promjenjive vrijednosti x_1 i x_2, a da se vrijednost funkcije cilja ne promijeni. To može skrenuti pozornost na potencijalnu mogućnost pojeftinjenja usluga no ta mogućnost u konkretnom primjeru ne postoji zbog elemenata u koloni *Reduced cost* koji su jednaki nuli.

Osim *Reduced cost*, postoji kolona *Slack or Surplus* u kojoj elementi prikazuju dda li su zadovoljena ili nisu zadovoljena ograničenja u modelu te u kojoj mjeri.

Kolona *Dual prices* ima funkciju da se svakom ograničenju dodjeljuje brojka koja predstavlja dualnu cijenu. A dualna cijena može značit vrijednost za koju bi se mogla poboljšat vrijednost funkcije cilja ukoliko se kontinuirana vrijednost na desnoj strani ograničenja poveća za jedan tj. ako se ista ta vrijednost smanji za jedan.

6. UVOD U ZADATAK I RJEŠENJE ZADATKA

6.1 OPIS ZADATKA

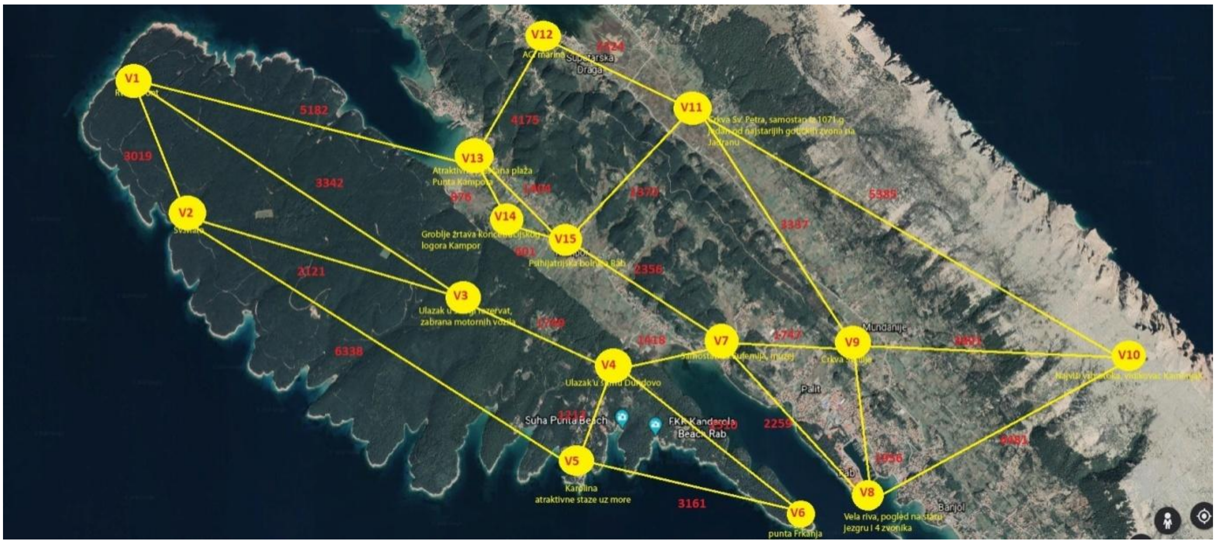
Potrebno je izabrati zanimljivu lokaciju s postojećim ili potencijalno zanimljivim biciklističkim rutama. U ovom slučaju lokacija odabira je Otok Rab, iz osobnih razloga (poznavanje terena). Nakon odabira lokacije potrebno je odrediti najzanimljivije sadržaje unutar određene destinacije, zatim ih međusobno povezati na način da svaka grana karakterizira put kojim se bicikla može nesmetano voziti a da se pritom ne koristi glavna cestovna infrastruktura. Međusobno povezane lokacije odnosno sadržaji činiti će jednu cjelinu koju će se moći pristupiti algoritmom za rješavanje problema kineskog poštara. Potrebno je označiti udaljenost između sadržaja te izabrati čvor, iz kojih će se u ovom slučaju vozač bicikle uputiti u obilazak svih sadržaja te se vratiti u početni s uvjetom da se svaka grana u mreži prijeđe bar jednom a da se pritom prijeđe minimalan put.

6.2 POSTAVLJANJE ZADATKA

Slika 16 Prikazano odabrano područje na otoku Rabu sa zanimljivostima

Izvor : izradio student u programu Photoshop (12.9.2020.)

Na slici je proizvoljno odabrano 15 zanimljivosti vezanih uz Otok Rab (Rt Kalifront, Sv. Mara, Karolina, Šuma Dundo, Koncentracijski logor u Kamporu, Frkanj, ACI marina, Psihijatrijska bolnica, Trg, Kamenjak)



Slika 17 Sadržaji međusobno povezani granama koje predstavljaju biciklističku stazu

Izvor : izradio student u programu Photoshop (12.9.2020.)

Svaki čvor predstavlja jednu zanimljivost, a svaka grana koja povezuje čvorove predstavlja put kretanja kojom se biciklist može kretati. Crvenim brojkama označene su udaljenosti između čvorova odnosno duljine pojedinih grana. Važno je napomenuti da su putovi odabrani na način da se na njima može kretati isključivo bicikl bez prisustva motornih vozila.

Koristeći algoritam za rješavanje problema kineskog poštara potrebno je riješiti zadatak.

	v1	v2	v3	v4	v5	v6	v7	v8	v9	v10	v11	v12	v13	v14	v15	
v1		3019	3342										5182			**11543**
v2			2021		6338											**8359**
v3				1749												**1749**
v4					1213		1418									**2631**
v5						3161										**3161**
v6				2510												**2510**
v7								2259	1747							**4006**
v8									1956	6481						**8437**
v9											3337					**3337**
v10									3891		5385					**9276**
v11												2324				**2324**
v12													4175			**4175**
v13														876	1404	**2280**
v14															601	**601**
v15							2356				2370					**4726**
	0	**3019**	**5363**	**4259**	**7551**	**3161**	**3774**	**2259**	**7594**	**6481**	**11092**	**2324**	**9357**	**876**	**2005**	**69115**

Slika 18 Matrica udaljenosti između čvorova

Izvor : izradio student u programu Microsoft Office Excel (15.9.2020.)

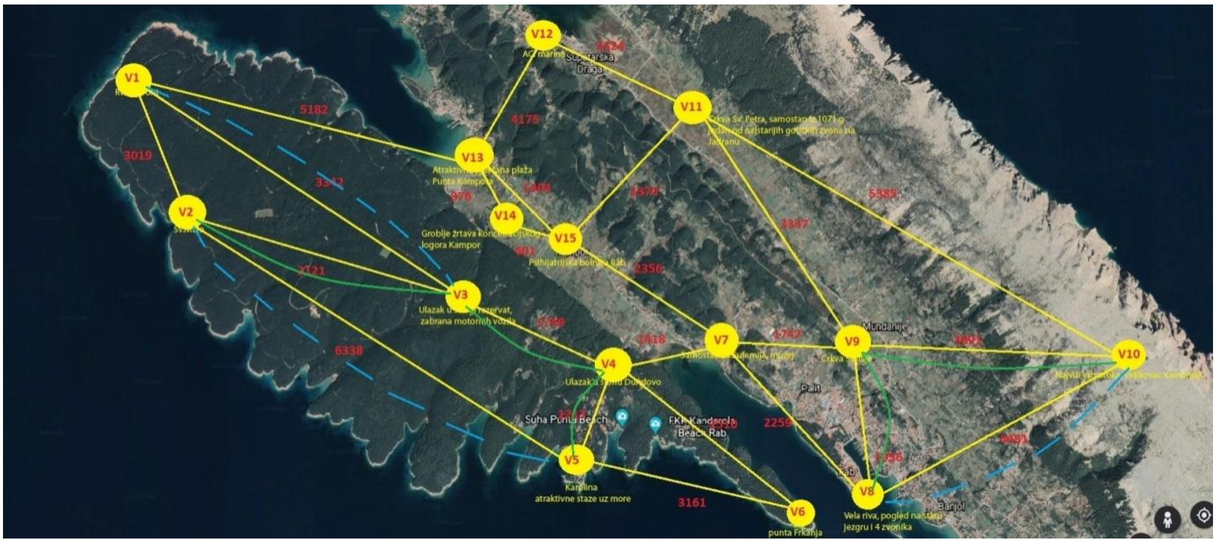
6.3 PRIMJENA ALGORITMA ZA RJEŠAVANJE PROBLEMA KINESKOG POŠTARA

Potrebno je pronaći sve čvorove neparnog stupnja.

Tablica br.3 Stupnjevi čvorova

Čvor	**Stupanj čvora**
V1	3
V2	3
V3	3
V4	4
V5	3
V6	2
V7	4
V8	3
V9	4
V10	3
V11	4
V12	2
V13	4
V14	2
V15	4

Iz tablice se može iščitati da graf (slika 18) sadrži čvorove V1,V2,V3,V5,V8,V10 neparnog stupnja što znači da graf nije Euler-ov. Kako bi se uvjet parnog stupnja zadovoljio potrebno je postaviti umjetne bridove koji spajaju čvorove neparnih stupnjeva.



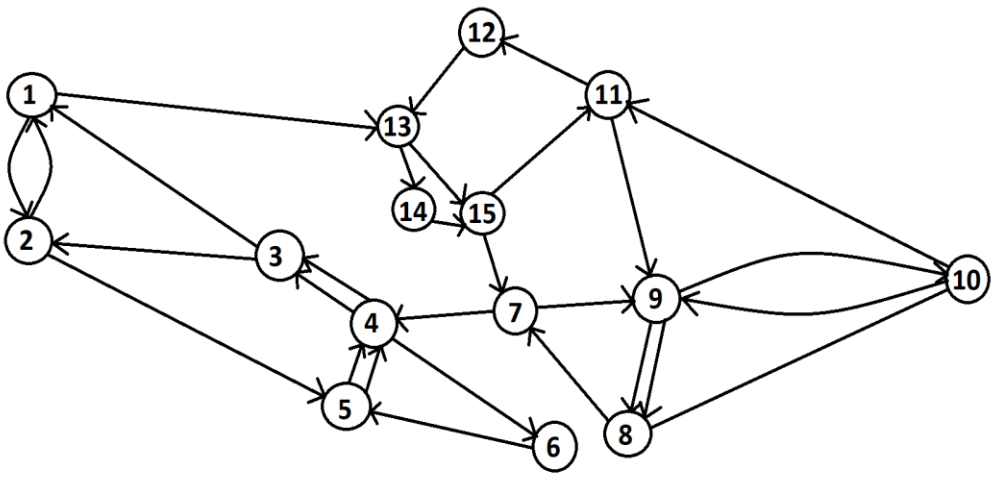
Slika19 Sadržaji (čvorovi) povezani sa bridovima te mogućim umjetnim bridovima

Izvor : izradio student u programu Photoshop (12.9.2020.)

Na slici su plavom isprekidanom linijom prikazani umjetni bridovi na način da su upareni V1 i V3, V2 i V5, V8 i V10. Zelena linija također označava umjetan brid koji nije direktno povezan. Primjer V2 i V5 direktno su povezani umjetnim bridom plave linije dok se zelenom linijom radi šetnja V2-V3-V4-V5.

6.4 PRONALAŽENJE OPTIMALNE RUTE

Pronalazak optimalne rute s polazištem i završetkom u čvoru **1**



Slika 20 Graf optimalne ture

Izvor : izradio student u programu Paint (15.9.2020.)

Provjerom grafa (slika 20) može se utvrditi da su svi čvorovi parnog stupnja.

Minimalna ukupna dužina putovanja iznosi 69115 m, budući da se linkovi **4→3, 5→4** i **9→8** prolaze dva puta u istom smjeru ukupna dužina puta povećava se za 11828m, što čini ukupnu minimalnu dužinu puta od 80943m a da se pritom obiđu sve grane minimalno jednom.

OPTIMALNA RUTA GLASI :

1→2→5→4→3→2→1→13→14→15→11→12→13→15→7→9→8→10→11→9→10→9→8→7→4 → 6 → 5 → 4 → 3 →**1**.

U nastavku je dodano i softversko rješenje problema.

```
Solution Report - KPP3

Global optimal solution found.
Objective value:                              80943.00
Objective bound:                              80943.00
Infeasibilities:                              0.000000
Extended solver steps:                               0
Total solver iterations:                           387
Elapsed runtime seconds:                          0.08

                       Variable           Value        Reduced Cost
             YIJ( A0102, V1, V2)       1.000000            3019.000
            YIJ( A0113, V1, V13)       1.000000            5182.000
             YIJ( A0205, V2, V5)       1.000000            6338.000
             YIJ( A0709, V7, V9)       1.000000            1747.000
            YIJ( A0810, V8, V10)       1.000000            6481.000
            YIJ( A1009, V10, V9)       1.000000            3891.000
           YIJ( A1011, V10, V11)       1.000000            5385.000
           YIJ( A1112, V11, V12)       1.000000            2324.000
           YIJ( A1213, V12, V13)       1.000000            4175.000
           YIJ( A1314, V13, V14)       1.000000            876.0000
           YIJ( A1315, V13, V15)       1.000000            1404.000
           YIJ( A1415, V14, V15)       1.000000            601.0000
            YIJ( A1507, V15, V7)       1.000000            2356.000
           YIJ( A1511, V15, V11)       1.000000            2370.000
             YJI( A0102, V1, V2)       1.000000            3019.000
             YJI( A0103, V1, V3)       1.000000            3342.000
             YJI( A0203, V2, V3)       1.000000            2021.000
             YJI( A0304, V3, V4)       2.000000            1749.000
             YJI( A0405, V4, V5)       2.000000            1213.000
             YJI( A0407, V4, V7)       1.000000            1418.000
             YJI( A0506, V5, V6)       1.000000            3161.000
             YJI( A0604, V6, V4)       1.000000            2510.000
             YJI( A0708, V7, V8)       1.000000            2259.000
             YJI( A0809, V8, V9)       2.000000            1956.000
            YJI( A0911, V9, V11)       1.000000            3337.000
            YJI( A1009, V10, V9)       1.000000            3891.000
```

Slika 21 Softversko rješenje problema

Izvor : Lingo program (15.9.2020.)

Na osnovu dobivenog rješenja putem softvera minimalna vrijednost funkcije cilja 80943 odnosno minimalni mogući prijeđeni put koji biciklist može prijeći, a da pritom prijeđe svaki brid minimalno jedanput iznosi 80943m. Pri tome redoslijed prelaženja puta glasi : **1**→2→5→4→3→2→1→13→14→15→11→12→13→15→7→9→8→10→11→9→10→9→8→7→4 → 6 → 5 → 4 → 3 →**1,** a put odgovara varijablama koje se nalaze u rješenju, a čije su vrijednosti jednake jedinici: V1, V2; V1,V13; V2, V5; V7, V9; V8, V10; V10,V11; V11, V12; V12, V13; V13, V15; V14, V15, V15, V7; V15, V11; V1, V2; V1, V3; V2, V3; V4, V7; V5, V6; V6, V4; V7, V8; V9, V11; V10, V9.

Drugim riječima, promjenjive vrijednosti u modelu koje u optimalnom rješenju imaju vrijednost 1 predstavljaju simbolički elemente optimalnog puta između čvorova, a koji su uključeni u taj put.

7. ZAKLJUČAK

Predstavljeno je određeno područje otoka Raba u kojem su znamenitosti odnosno čvorovi, a prema algoritmu za riješavanje problema kineskog poštara na neorijentiranoj mreži je određena biciklistička ruta. Budući da prva originalna mreža nije zadovoljila Euler-ov graf, a da bi se zadovoljila potrebno je čvorovima neparnog stupnja dodati moguće umjetne bridove između kojih se može izračunati minimalni prijeđeni put. Nakon dodanih umjetnih bridova pojavila su se različita moguća rješenja zadatka, potrebno je razlučiti kojom rutom krenuti i koji brid više puta prijeći, a da duljina puta bude minimalna. Točan primjer toga može se uočiti između čvorova 2 i 5 gdje je ukupna dužina umjetnog brida duža u odnosnu umjetnih bridova prelaskom preko čvorova 2,3,4 i 5 što ga ne čini optimalnijim rješenjem. Na temelju rješenja može se zaključiti da je algoritam odabrao rutu sa najkraćim prijeđenim putem, a da se sve grane tj. bridovi prijeđu minimalno jednom s početkom i završetkom u čvoru **1**, dok optimalna tura glasi:

1→2→5→4→3→2→1→13→14→15→11→12→13→15→7→9→8→10→11→9→10→9→8→7→4 → 6 → 5 → 4 → 3 →**1**.

Iz ovog riješenja moguće je očitati da je veze između čvorova 4-3, 5-4 i 9-8 potrebno prijeći dvaput što znači da se najmanja ukupna dužina puta povećava za 11828 metara, što čini ukupnu minimalnu dužinu za obavljanje ovog zadatka od 80943 metara sa početkom i završetkom u čvoru 1.

LITERATURA

1. Povijest bicikla, online : https://hr.wikipedia.org/wiki/Bicikl (13.2.2020.)

2. Razvoj bicikla, online : https://www.telegram.hr/zivot/ako-vas-je-zanimalo-kako-su-se-razvijali-bicikli-ovo-je-kratak-pregled-njihove-povijesti/ (13.2.2020.)

3. Anatomija bicikla, online : http://www.rog-joma.com/hr/blog/biciklizam-pocetnici-anatomija-dijelovi-bicikla/ (15.2.2020.)

4. Zanimljivosti o biciklima, online : https://www.rog-joma.hr/hr/blog/zanimljivosti-o-biciklima-i-biciklizmu-koje-niste-znali/ (15.2.2020.)

5. Šimunović, LJ. 2015, Prometna (transportna) mreža, Fakultet prometnih znanosti, Zavod za gradski promet, Zagreb

6. Mehanović, M. 2015, Mreže u saobraćaju i komunikacijama, Univerzitet u Sarajevu, Fakultet za saobraćaj i komunikacije, Sarajevo

7. Bauk, S. I. 2011, Kvantitativne metode optimizacije u funkciji naučnog menadžmenta, Ekonomska laboratorija za istraživanje tranzicije Podgorica, Podgorica

8. Carić, T. 2014, Optimizacija prometnih procesa, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet prometnih znanosti, Zagreb

9. Bardi E., Coyle J., Novack R. 2006, Management of transportation, Thomson South Western, ISBN 0-324-31443-4

POPIS TABLICA