Primjena kvantitativnih metoda u poslovanju turističke agencije

Tomulić, Teo

SVEUČILIŠTE U RIJECI

POMORSKI FAKULTET

TEO TOMULIĆ

PRIMJENA KVANTITATIVNIH METODA U POSLOVANJU TURISTIČKE AGENCIJE

ZAVRŠNI RAD

Rijeka, 2024.

SVEUČILIŠTE U RIJECI

POMORSKI FAKULTET

PRIMJENA KVANTITATIVNIH METODA U POSLOVANJU TURISTIČKE AGENCIJE

APPLICATION OF QUANTITATIVE METHODS IN THE BUSINESS OF A TOURIST AGENCY

ZAVRŠNI RAD
BACHELOR THESIS

Kolegij: Kvantitativne metode u prometu

Mentor: prof. dr. sc. Svjetlana Hess

Student: Teo Tomulić

Studijski smjer: Tehnologija i organizacija prometa

JMBAG: 0335004557

Rijeka, rujan 2024.

Student: Teo Tomulić

Studijski program: Tehnologija i organizacija prometa

JMBAG: 0335004557

IZJAVA O SAMOSTALNOJ IZRADI ZAVRŠNOG RADA

Kojom izjavljujem da sam završni rad s naslovom

Primjena kvantitativnih metoda u poslovanju turističke agencije

izradio samostalno pod mentorstvom

prof. dr. sc. Svjetlane Hess

U radu sam primijenio metodologiju izrade stručnog/znanstvenog rada i koristio literaturu koja je navedena na kraju završnog rada. Tuđe spoznaje, stavove, zaključke, teorije i zakonitosti koje sam izravno ili parafrazirajući naveo u završnom radu na uobičajen, standardan način citirao sam i povezao s fusnotama i korištenim bibliografskim jedinicama, te nijedan dio rada ne krši bilo čija autorska prava. Rad je pisan u duhu hrvatskoga jezika.

Student

Tomulić

____

Teo Tomulić

Student: Teo Tomulić

Studijski program: Tehnologija i organizacija prometa

JMBAG: 0335004557

IZJAVA STUDENTA – AUTORA

O JAVNOJ OBJAVI OBRANJENOG ZAVRŠNOG RADA

Izjavljujem da kao student – autor završnog rada dozvoljavam Pomorskom fakultetu Sveučilišta u Rijeci da ga trajno javno objavi i besplatno učini dostupnim javnosti u cjelovitom tekstu u mrežnom digitalnom repozitoriju Pomorskog fakulteta.

U svrhu podržavanja otvorenog pristupa završnim radovima trajno objavljenim u javno dostupnom digitalnom repozitoriju Pomorskog fakulteta, ovom izjavom dajem neisključivo imovinsko pravo iskorištavanja bez sadržajnog, vremenskog i prostornog ograničenja mog završnog rada kao autorskog djela pod uvjetima *Creative Commons* licencije CC BY Imenovanje, prema opisu dostupnom na http://creativecommons.org/licenses/

Student – autor

Tomulić

____

SAŽETAK

Optimizacija je postupak koja se obavlja gotovo svakodnevno i nesvjesno, u različitim aspektima života (najkraći put, najveća ušteda vremena, minimalni trošak, itd.). Primjenom kvantitativnih metoda, koje se baziraju na matematičkim modelima i znanstvenom pristupu, pronalazi se optimalno rješenje za probleme koji imaju različita ograničenja i kriterije optimizacije. Na taj način se pomaže u donošenju pravih poslovnih odluka, naročito u poslovanju većih kompanija koje imaju veći obim djelatnosti. U ovom radu analizirani su primjeri problema s kojima se susreće turistička agencija Sunturist iz Novalje na otoku Pagu u svom poslovanju i ponuđena su optimalna rješenja koristeći metode linearnog programiranja, transportnog problema i problema asignacije. Problemi su riješeni ručno i provjereni pomoću računalnog programa QM for Windows (verzija 5.2)

Ključne riječi: linearno programiranje, transportni problem, asignacija, optimizacija.

SUMMARY

Optimization is a procedure that is performed almost daily and unconsciously, in various aspects of life (shortest path, maximum time saving, minimum cost, etc.). By applying quantitative methods, which are based on mathematical models and a scientific approach, the optimal solution is found for problems that have different limitations and optimization criteria. In this way, it helps in making the right business decisions, especially in the business of larger companies that have a larger scope of activities. In this paper, examples of problems faced by the tourist agency Sunturist from Novalja on the island of Pag in its operations are analyzed and optimal solutions are offered using the methods of linear programming, transportation problems and assignment problems. Problems were solved manually and verified using the computer program QM for Windows (version 5.2).

Keywords: linear programming, transportation problem, assignment, optimization.

SADRŽAJ

SAŽETAK .... **II**

SUMMARY .... **II**

SADRŽAJ .... **III**

1. UVOD **1**

2. OPERACIJSKA ISTRAŽIVANJA **2**

2.1. OPIS OPERACIJSKIH ISTRAŽIVANJA **2**

2.2. METODA LINEARNOG PROGRAMIRANJA **3**

2.2.1. Opis metode linearnog programiranja *3*

2.2.2. Dopunske, umjetne i dualne varijable *5*

2.2.3. Primjena linearnog programiranja *6*

2.3. TRANSPORTNI PROBLEM **7**

2.3.1. Opis transportnog problema *7*

2.3.2. Rješavanje transportnog problema *8*

2.3.3. Primjena transportnog problema *10*

2.4. PROBLEM OPTIMALNOG DODJELJIVANJA (ASIGNACIJE) **11**

2.4.1. Opis problema asignacije *11*

2.4.2. Mađarska metoda *12*

2.4.3. Primjena problema asignacije *13*

3. PRIMJENA METODE LINEARNOG PROGRAMIRANJA **14**

3.1. OPIS PROBLEMA **14**

3.2. RJEŠAVANJE METODOM LINEARNOG PROGRAMIRANJA **14**

3.3. ANALIZA REZULTATA **16**

4. PRIMJENA METODE TRANSPORTNOG PROBLEMA **19**

4.1. OPIS PROBLEMA **19**

4.2. RJEŠAVANJE TRANSPORTNOG PROBLEMA NA PRIMJERU **20**

4.3. ANALIZA REZULTATA **23**

5. PRIMJENA METODE ASIGNACIJE **24**

5.1. OPIS PROBLEMA **24**

5.2. RJEŠAVANJE PROBLEMA ASIGNACIJE NA PRIMJERU **24**

5.3. ANALIZA REZULTATA **27**

6. ZAKLJUČAK **28**

LITERATURA **29**

POPIS TABLICA **30**

POPIS SLIKA **31**

1. UVOD

U ovome radu će se prikazati primjena odabranih kvantitativnih metoda iz znanstvene discipline operacijskih istraživanja, i to metoda linearnog i cjelobrojnog linearnog programiranja, transportnog problema te problema asignacije (dodjeljivanja). Navedene metode su ukratko elaborirane te primijenjene na konkretnim primjerima u svrhu rješavanja problema raspoređivanja vozila, vozača te radnika turističke agencije Sunturist u Novalji.

Sunturist je turistička agencija u Novalji na otoku Pagu, osnovana 1980. godine. Pruža usluge iznajmljivanja apartmana, prodaje i provođenja izleta te prijevoza turista. Vozni park Sunturista sastoji se od pet autobusa kapaciteta 50 sjedala (u daljnjem radu "velikih autobusa"), četiri autobusa kapaciteta 24 sjedala (u daljnjem radu "mini-busova") te osam kombi vozila od 8 sjedala. Broj zaposlenih vozača varira tijekom sezone, ali u vrhuncu sezone broj zaposlenih vozača je oko petnaest. Osim vozača, u agenciji radi dvadesetak ljudi, određeni dio su stalni zaposlenici, a većinu čine studenti. Optimalno raspoređivanje vozila, vozača te radnika nužno je za uspješno poslovanje agencije, minimiziranjem troškova, čime se maksimizira profit.

Svi problemi bit će riješeni ručno, a postupci rješavanja te analiza rezultata bit će detaljno prikazani. Kao računalna podrška te alat za provjeru i prikaz rezultata koristit će se računalni program QM for Windows (verzija 5.2). QM for Windows računalni je program koji pruža matematičku analizu za upravljanje operacijama i kvantitativne metode.

2. OPERACIJSKA ISTRAŽIVANJA

2.1. OPIS OPERACIJSKIH ISTRAŽIVANJA

Operacijska istraživanja su interdisciplinarna znanstvena disciplina koja se bave primjenom analitičkih metoda na stvarnim problemima radi donošenja boljih poslovnih odluka. Operacijska istraživanja su skup metoda programiranja i analize kojima se pomoću matematičkih modela i tehnika optimizacije dolazi do optimalnog rješenja. Problemi operacijskih istraživanja razlikuju se zavisno od metoda koje se koriste.

Najrasprostranjenija i najviše korištena metoda operacijskih istraživanja je metoda linearnog programiranja. Linearno programiranje je metoda nalaženja optimalnog rješenja koristeći matematičke modele kod kojih su varijable međusobno linearno zavisne. Cilj je pronalaženje minimuma ili maksimuma zadane funkcije, a da se pritom zadovolje sva zadana ograničenja. Cjelobrojno linearno programiranje za varijable i rješenja koristi isključivo cijele brojeve. Cjelobrojno programiranje koristi se više za primjerice probleme transporta gdje trebaju sve biti cijeli brojevi (ne može se poslati na neku lokaciju pola autobusa).

Dinamičko programiranje je metoda rješavanja kompleksnih problema razlamanjem na manje jednostavnije probleme. Nalaze se optimalna rješenja jednostavnijih problema i na taj način se spajanjem dolazi do rješenja prvotno zadanog kompleksnijeg problema. Mrežni modeli uključuju probleme najkraćeg puta i maksimalnog toka prometnica. Koriste se u logistici, upravljanjem opskrbnim lancem te u transportnim problemima. Problemi prijevoza robe, sredstava, ljudi iz više ishodišta u više odredišta sa ciljem zadovoljenja ponude ishodišta i potražnje odredišta mogu se riješiti metodama koje spadaju pod transportne probleme. Teorija redova čekanja koristi se za proučavanje stvaranja redova, kako funkcioniraju te o čemu ovisi njihovo povećavanje ili smanjivanje s ciljem poboljšavanja korisničke usluge. Teorija igara je grana primijenjene matematike koja se koristi u situacijama kada uspjeh jedne racionalne osobe ovisi o odlukama drugih racionalnih osoba. Koristi se u ekonomiji, političkim znanostima te vojnim strategijama.

Cilj korištenja metoda operacijskih istraživanja je pronalazak optimalnog rješenja s obzirom na zadana ograničenja i postavljenu funkciju cilja. Optimalno rješenje je najbolje moguće rješenje koje zadovoljava zadana ograničenja. Optimalno rješenje nekog problema uvijek je minimum (troškovi, radna snaga, prijeđena udaljenost) ili maksimum (zarada, broj turista). Za određeni zadani problem moguće je imati i više rješenja koja daju najbolju vrijednost funkcije cilja, te u tom slučaju postoje alternativna optimalna rješenja. Nijedno od tih rješenja nije bolje, već su oba optimalna i jednako povoljna. Ukoliko se promijeni neko ograničenje u problemu te se zbog toga promijeni i optimalno rješenje, to ne znači da je novo rješenje "optimalnije" od prethodnog, nego da je zbog promijenjenih uvjeta novo rješenje optimalno. Iz toga se može zaključiti da nijedno rješenje nije zauvijek optimalno, već je svako rješenje optimalno pri nekim uvjetima ili ograničenjima, ali uz male promjene uvjeta, to rješenje prestaje biti optimalno. Optimalnim rješenjima teži se u svim granama i svim aspektima svakodnevnoga života, npr. koji je najkraći put do posla, škole ili fakulteta.

2.2. METODA LINEARNOG PROGRAMIRANJA

2.2.1. Opis metode linearnog programiranja

Linearno programiranje prvi je razvio Leonid Kantorovič 1939. godine s ciljem minimiziranja troškova vojske i optimizacije raspodjele resursa tokom II. svjetskog rata. Simpleks metodu rješavanja problema linearnog programiranja razvio je George B. Dantzig 1947. godine. John von Neumann 1951. godine razvio je teoriju dualnosti kao rješenje problema linearnog programiranja. Kroz godine, razvijale su se nove metode za rješavanje problema linearnog programiranja te se linearno programiranje u današnje vrijeme većinom koristi za rješavanje problema maksimiziranja profita, minimiziranja troškova te optimalne raspodjele ograničenih resursa. Jednostavniji problemi linearnog programiranja mogu se riješiti grafičkom metodom, a za složenije probleme koristi se simpleks metoda.

Linearno programiranje matematička je metoda koja se koristi za pronalaženje optimalne vrijednosti u zadanom matematičkom modelu. Optimalna vrijednost funkcije cilja može biti maksimum ili minimum s određenim brojem strukturnih varijabli x_1, x_2,…, x_n međusobno povezanih linearnim vezama, tj. ograničenjima u obliku linearnih jednadžbi ili nejednadžbi.

Standardni oblik matematičkog modela glasi ovako:

$MaxZ = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$

uz ograničenja :

(1) $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1$

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_2$

…………………………………….

$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m$

(2) $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$

Sažeti oblik matematičkog modela:

$$MaxZ = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

uz ograničenja:

(1) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i,\ i = 1,2,...,m$

(2) $x_j > 0,\ j = 1,2,...,n$

Opis oznaka :

m – broj ograničenja

n – broj varijabli

c_j – koeficijent kriterija j-te varijable, j = 1,..., n

x_j – količina j-te varijable, j = 1,..., n

b_i – količina i-tog ograničenja, i = 1,..., m

a_{ij} – količina i-tog ograničenja potrebnog za jednu jedinicu j-te varijable

b_i su bilo koji pozitivni brojevi, c_{ij} i a_{ij} bilo koji realni brojevi, a m i n su bilo koji prirodni brojevi

U matričnoj notaciji :

$$MaxZ = [c_1 \quad c_2 \quad \cdots \quad c_n] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

uz ograničenja:

(1) $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$

(2) $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}$

$[x_n]$ $[0]$

Sažeti oblik kada je cilj funkcije minimum :

$$MinZ = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

uz ograničenja:

(1) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i, \qquad i = 1,...,m$

(2) $x_j \geq 0, \qquad j = 1,...,n$

2.2.2. Dopunske, umjetne i dualne varijable

Dopunske varijable (u_i) su varijable koje se koriste u linearnom programiranju prilikom primjene simpleks metode. Dopunske i umjetne varijable koriste se za pretvaranje nejednadžbi u jednadžbe što je nužno za korištenje simpleks metode u linearnom programiranju. Dopunske varijable dodaju se u funkciju cilja, ali se množe s 0 tako da nemaju utjecaja na funkciju cilja, primjerice: $MinZ = 20x_1 + 30x_2 + 8x_3 + 0u_1 + 0u_2 + 0u_3$.

Dopunske varijable mogu se podijeliti na "*slack*" i suvišak varijable. *Slack* varijable dodaju se ograničenjima (nejednadžbama) sa znakom ≤ kako bi ih se pretvorilo u jednadžbe. *Slack* varijable predstavljaju neiskorišteni dio resursa. Primjerice, $3x_1 + 2x_2 \leq 8$ pretvara se u ovaj oblik: $3x_1 + 2x_2 + u = 8$. Dopunska varijabla "u" u ovome primjeru je *slack* varijabla te predstavlja neiskorišteni dio ograničenja: $3x_1 + 2x_2 \leq 8$.

Suvišak varijable koriste se u ograničenjima (nejednadžbama) sa znakom ≥ kako bi se nejednadžbe pretvorile u jednadžbe. Suvišak varijable predstavljaju vrijednost za koju određeni resurs prelazi ograničenje potrebnog minimuma. Primjerice, $2x_1 + 3x_2 \geq 10$ pretvara se u $2x_1 + 3x_2 - u = 10$. Dopunska varijabla "u" u ovome primjeru je suvišak varijabla te predstavlja vrijednost za koju je premašen potreban minimum u ograničenju $2x_1 + 3x_2 \geq 10$.

Umjetne varijable (v) koriste se isključivo u ograničenjima (nejednadžbama) gdje se koristi znak ≥. Koriste se kao dodatak suvišak dopunskim varijablama radi dobivanja prihvatljivoga početnog/bazičnog rješenja prilikom rješavanja problema linearnog programiranja simpleks metodom. Primjerice, $2x_1 + 3x_2 - u = 10$ pretvara se u $2x_1 + 3x_2 - u + v = 10$. Dodavanjem umjetnih varijabli osigurava se da će u svakome ograničenju kada se dodaju dopunske i umjetne varijable neka varijabla imati pozitivan predznak sa koeficijentom jedan što omogućava rješavanje problema linearnog programiranja simpleks metodom (dovoljan broj jediničnih vektora).

Kao i dopunske varijable, umjetne varijable se također moraju dodati u funkciju cilja. Ovisno o tome je li funkcija cilja minimum ili maksimum dodaju se s velikim pozitivnim koeficijentom, u slučaju da je funkcija cilja minimum, ili velikim negativnim koeficijentom, u slučaju da je funkcija cilja maksimum, primjerice:

$MinZ = 25x_1 + 35x_2 + 10x_3 + 0u_1 – 0u_2 + 0u_3 + 100v_1$

$MaxZ = 35x_1 + 15x_2 – 0u_1 + 0u_2 + 0u_3 – 100v_1$.

Vrijednost umjetnih varijabli (v) uvijek iznosi 0 tako da njihovo dodavanje u funkciju cilja ne utječe na rješenje.

Dualne varijable (y_i) očitavaju se u posljednjoj iteraciji simpleks tablice u retku z_j, a ispod stupaca onih vektora koji se nalaze u početnom rješenju. Prikazuju za koliko bi se promijenila vrijednost funkcije cilja kada bi se određeno ograničenje smanjilo ili povećalo za jednu jedinicu. Varijabla y_i izražena je u istim mjernim jedinicama kao i funkcija cilja Z.

2.2.3. Primjena linearnog programiranja

Linearno programiranje može se koristiti u raznim granama industrije, transportu, ekonomiji, medicini, itd. Jedna od glavnih primjena je u planiranju proizvodnje. Pomoću linearnog programiranja može se odrediti optimalni raspored ograničenih resursa (materijali, radnici, strojevi) s ciljem maksimizacije profita ili minimizacije troškova. Koristi se i u rafinerijama te postrojenjima za procesuiranje hrane radi određivanja optimalne mješavine sastojaka ili materijala da bi završni proizvod zadovoljavao standarde kvalitete uz minimalne troškove. Linearno programiranje koristi se i mnogim granama transporta. Pomaže u pronalaženju optimalnih ruta i optimalnog rasporeda za prijevozna sredstva (autobusi, dostavna vozila) te pomaže u odlučivanju prilikom pronalaska lokacija za izgradnju novih skladišta i distribucijskih centara. Linearno programiranje pomaže i u stvaranju investicijskog portfelja s ciljem maksimalnog profita uzimajući u obzir budžet i toleranciju rizika. U bolnicama se uz pomoć linearnog programiranja stvaraju optimalni rasporedi za bolničko osoblje da bi se osigurala odgovarajuća njega svim pacijentima, a pritom smanjili troškovi osoblja i poštovali pravilnici o radu. Može se koristiti i u marketingu gdje se traži optimalan omjer oglašavanja između televizijskih reklama, radija te putem interneta da bi se došlo do što je veće moguće populacije unutar zadanog budžeta.

2.3. TRANSPORTNI PROBLEM

2.3.1. Opis transportnog problema

Transportni problem je specifičan tip problema linearnog programiranja kojim se rješava problem prijevoza sredstava, tereta ili ljudi iz više ishodišta u više odredišta. Cilj je da troškovi prijevoza (udaljenost, vrijeme) budu minimalni ili iznosi prihoda maksimalni. Transportni problem može biti otvorenoga ili zatvorenoga tipa. Transportni problem otvorenog tipa je problem kod kojeg postoji višak ponude ili potražnje, a transportni problem zatvorenog tipa je problem kod kojeg su ponuda i potražnja jednake.

Prikaz odnosa ponude i potražnje kod zatvorenog tipa transportnog problema je:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Prikaz odnosa ponude i potražnje kod otvorenog tipa transportnog problema je:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Svaki transportni problem može se prikazati sa matricom transporta (Tablica 1).

Tablica 1. Matrica transporta

Odredište / Ishodište	O_1	O_2	…	O_n	Ponuda a_i
I_1	$\boxed{c_{11}}$ x_{11}	$\boxed{c_{12}}$ x_{12}	…	$\boxed{c_{1n}}$ x_{1n}	a_1
I_2	$\boxed{c_{21}}$ x_{21}	$\boxed{c_{22}}$ x_{22}	…	$\boxed{c_{2n}}$ x_{2n}	a_2
…					…
I_3	$\boxed{c_{m1}}$ x_{m1}	$\boxed{c_{m2}}$ x_{m2}	…	$\boxed{c_{mn}}$ x_{mn}	a_m
Potražnja b_j	b_1	b_2	…	b_n	$\sum a_i = \sum b_j$ $\sum a_i \neq \sum b_j$

Izvor: izradio student

Opis oznaka:

m – ukupan broj ishodišta, i = redni broj ishodišta, $i = 1,..., m$

n – ukupan broj odredišta, j = redni broj odredišta, $j = 1,..., n$

c_{ij} – trošak prijevoza (udaljenost, novac, vrijeme) ili dobit prijevoza jedne jedinice na relaciji od i-tog ishodišta do j-tog odredišta

x_{ij} – količina koju treba prevesti iz i-tog ishodišta u j-to odredište

a_i – količina koja se prevozi iz pojedinih ishodišta

b_j – količina koju je potrebno prevesti na svako odredište

2.3.2. Rješavanje transportnog problema

Transportni problem rješava se u dva koraka. Za oba koraka koriste se određene metode. U prvom koraku koriste se metode za postavljanje početnog programa (početno rješenje) a u drugom koraku se metodama za optimizaciju početnog programa kroz više iteracija dolazi do optimalnog rješenja. Za postavku početnog rješenja mogu se koristiti sljedeće metode: metoda "sjeverozapadnog kuta" (eng. *Northwest Corner Method*), metoda najmanjih troškova (eng. *Least Cost Method*) te Vogelova metoda. Za poboljšanje početnog programa i dobivanje optimalnog rješenja, tj. optimizaciju početnog programa koriste se metoda "skakanja s kamena na kamen", koja će se koristiti za rješavanje problema u ovome radu, te MODI metoda.

Metoda "sjeverozapadnog kuta" najjednostavnija je od ove tri metode jer se pri postavljanju početnog rješenja ne uzimaju u obzir jedinični troškovi ili jedinična zarada, već se postavka obavlja isključivo pozicijski. U sjeverozapadni kut matrice transporta (polje (1,1)) dodjeljuje se najveći mogući broj jedinica dok se ne rasporedi ponuda prvog ishodišta ili zadovolji potražnja prvog odredišta. Ukoliko je u potpunosti raspoređena ponuda prvog ishodišta, najveći mogući broj jedinica dodjeljuje se u polje (2,1) dok se ne zadovolji potražnja prvog odredišta ili u potpunosti rasporedi ponuda drugog ishodišta. Postupak se nastavlja dok se ne rasporedi ponuda svih ishodišta i zadovolji potražnja svih odredišta sve do polja (m,n). Ova metoda može se koristiti prilikom rješavanja jednostavnijih transportnih problema, ali kod složenijih transportnih problema ne preporuča se koristiti ovu metodu jer zbog neuzimanja u obzir jediničnih troškova ili jedinične zarade prilikom postavke početnog rješenja, potreban je veliki broj iteracija da bi se od početnog rješenja došlo do optimalnoga.

Metoda najmanjih troškova ili najveće zarade primjenjuje se tako da se u najpovoljnije polje (najmanji jedinični trošak ili najveća jedinična zarada) dodjeli najveći mogući broj jedinica. Nakon što se u najpovoljnije polje dodjeli najveći mogući broj jedinica, traži se sljedeće najpovoljnije polje u kojem se ponovno dodjeljuje/stavlja najveći mogući broj jedinica. Postupak se ponavlja dok se ne rasporedi ponuda svih ishodišta i zadovolji potražnja svih odredišta.

Vogelova metoda najsloženija je od ove tri metode, ali zato je početno rješenje bliže optimalnom rješenju te je potrebno manje iteracija da bi se došlo do optimalnoga rješenja. Za svaki redak i stupac računa se razlika između dvije najpovoljnije opcije (dva najmanja jedinična troška ili dvije najveće jedinične zarade). U redak ili stupac gdje je razlika najveća u polje s najmanjim jediničnim troškom ili najvećom jediničnom zaradom stavlja se najveći mogući broj jedinica čime se rasporedi u potpunosti ponuda nekog ishodišta ili zadovolji u potpunosti potražnja nekog odredišta. Redak ili stupac u kojem je raspoređena ponuda ili zadovoljena potražnja ne promatra se pri daljnjem dodjeljivanju. Postupak računanja razlike između dvije najpovoljnije opcije redaka i stupaca ponavlja se sve dok se ne rasporede sve jedinice. Ukoliko je u potpunosti raspoređena ponuda nekog retka, ponovno se izračunavaju samo razlike stupaca jer su razlike ostalih redaka ostale nepromijenjene. Sukladno tome, ukoliko je u potpunosti raspoređena potražnja nekog stupca, ponovno se izračunavaju samo razlike redaka jer su razlike ostalih stupaca ostale nepromijenjene. Postupak se ponavlja dok se matrica ne svede na samo jedan redak ili stupac. U tom retku ili stupcu gledaju se jedinični troškovi (c_{ij}) i preostale jedinice ponude ili potražnje smještaju se u polja gdje su jedinični troškovi najmanji.

Metoda "skakanja s kamena na kamen" koristi se za optimizaciju početnog programa prilikom rješavanja transportnog problema. Nakon postavljanja početnog rješenja, treba provjeriti je li došlo do degeneracije. Da bi se mogla koristiti metoda "skakanja s kamena na kamen", broj kamena mora biti jednak zbroju ishodišta i odredišta minus jedan, odnosno: broj kamena = broj ishodišta + broj odredišta – 1. Nakon što je postavljen početni program (prvo moguće rješenje), izračunavaju se relativni troškovi u svim neiskorištenim poljima matrice transporta. Relativni trošak dobiva se naizmjeničnim zbrajanjem i oduzimanjem jediničnih troškova u poljima gdje se nalazi "kameni" koji se nalaze na putanji formiranoj pod pravim kutom i to od polja za koje se izračunava relativni trošak dok se ne stigne natrag do tog polja. Ukoliko je relativni trošak manji od 0, to znači da raspoređivanjem određenog broja transportnih jedinica na tu relaciju ukupan trošak cijelog procesa raste. Ukoliko je relativni trošak jednak 0, to znači da bi raspoređivanjem određenog broja transportnih jedinica na tu relaciju ukupan trošak ostao isti. Ukoliko je relativni trošak veći od 0, to znači da postoji prostor za poboljšavanje trenutne matrice transporta te da još uvijek nije dobiveno optimalno rješenje. Za transportne probleme najčešće se traži minimum (vrijeme, trošak, udaljenost) što znači da je optimalno rješenje dobiveno kada su relativni troškovi u svim neiskorištenim poljima matrice transporta manji ili jednaki 0, a ukoliko je u završnoj matrici neki relativan trošak jednak 0 to je pokazatelj da za zadani problem postoji alternativno optimalno rješenje. Korištenjem ove metode, svaka iteracija trebala bi biti bolja od prethodne (što se provjerava izračunom ukupnih troškova) jer se početni program kroz određeni broj iteracija optimizira te se na taj način može provjeriti je li problem ispravno riješen.

2.3.3. Primjena transportnog problema

Transportni problem se većinom koristi u tvrtkama koje se bave prijevozom. Primjena metode transportnog problema omogućava pronalazak optimalnog rasporeda prijevoza robe iz više skladišta do više maloprodajnih mjesta ili do kupaca, s minimalnim troškovima. Gradovi koriste transportni problem za optimizaciju ruta javnog prijevoza da bi se zadovoljila potražnja putnika za prijevozom, a troškovi zadržali na minimumu. Mobilne aplikacije za prijevoz, kao što su npr. Uber i Lyft mogu koristiti modele transportnog problema da bi dodijelili vozače putnicima na način da se minimizira vrijeme čekanja čime se povećava efikasnost. Poljoprivrednici i poljoprivredna poduzeća koriste transportni problem za pronalazak optimalnog rasporeda prijevoza usjeva i žive stoke od poljoprivrednih posjeda do tržnice ili klaonice. Transportni modeli još se koriste i za efikasnu distribuciju humanitarne pomoći (hrana, voda, medicinska oprema) iz distribucijskih centara do pogođenih područja. U slučaju velike katastrofe transportni modeli mogu se koristiti za optimalan raspored spasioca na različita područja pogođena katastrofom.

2.4. PROBLEM OPTIMALNOG DODJELJIVANJA (ASIGNACIJE)

2.4.1. Opis problema asignacije

Problem optimalnog dodjeljivanja (asignacije) specifičan je tip transportnog problema. Kod problema asignacije potrebno je n jedinica (osoba, stroj, prijevozno sredstvo) rasporediti na n poslova s ciljem minimizacije troškova ili maksimizacije dobiti (zarade). Kod matrice $n \cdot n$ postoji $n!$ različitih mogućnosti rasporeda "radnih" jedinica na poslove pri čemu je cilj pronaći optimalno rješenje gdje je ukupan trošak najmanji ili ukupna dobit najveća. Varijabla odlučivanja je binarna varijabla x_{ij} koja ima vrijednost 1 ako je i-toj jedinici dodijeljen j-ti posao, a 0 ako nije. Svakoj "radnoj" jedinici može biti dodijeljen samo jedan posao i svakom poslu može biti dodijeljena samo jedna "radna" jedinica. Za rješavanje problema asignacije postoji više algoritama i metoda, a jedna od često korištenih (primijenjena i u ovom radu) je mađarska metoda.

Funkcija cilja može biti maksimum ili minimum:

$$Max Z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

Matematički model problema asignacije u kojemu je cilj funkcije minimum :

$$Min Z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \qquad i = 1,\ldots,n$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \qquad j = 1,\ldots,n$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, \qquad i = 1,\ldots,n;\ j = 1,\ldots n$$

2.4.2. Mađarska metoda

Mađarska metoda je algoritam koji se koristi za rješavanje problema asignacije (dodjeljivanja). Autor metode je američki matematičar H.W. Kuhn, a metodu je bazirao prema radu iz teorije grafova mađarskih matematičara J. Egerváry-a i D. Kőnig-a.

Mađarska metoda koristi se za rješavanje problema minimuma, u slučaju da se radi o problemu maksimuma, potrebno je prvo svesti ga na problem minimuma tako da se pronađe najveći profit (zarada) i od toga broja se oduzmu sve ostale vrijednosti u tablici, jer je maksimalni profit = minimalni gubitak. Dobivena tablica je tablica minimalnih gubitaka i rješava se na isti način kao i ostali problemi minimuma. Osnova je postavljanje matrice individualnih troškova gdje su zadani jedinični troškovi na svakom polju za određenu radnu jedinicu i određeni posao (novčani, vrijeme, udaljenost).

Prvi korak je pronalaženje najmanje vrijednosti u svakome redu i ta vrijednost se oduzme od svih vrijednosti u redu. Nakon toga pronalazi se najmanja vrijednost u svakom stupcu, veća od nula, te se ta vrijednost oduzima od svih vrijednosti u stupcu. Na ovaj način dobivena je prva reducirana matrica gdje u svakome retku i svakome stupcu postoji barem jedna nula.

Drugi korak je promatranje redaka, traži se redak koji ima samo jednu 0. U tom slučaju ta 0 se dodijeli, a sve ostale nule u tom stupcu se prekriže. Isti princip primjenjuje se i na stupcima. Ukoliko je postignuta matrica gdje je u svakom retku i svakom stupcu jedna dodijeljena 0, to znači da je dobiveno optimalno rješenje, inače se prelazi na treći korak.

Treći korak je dobivanje druge reducirane matrice. Označava se redak koji nema nijednu dodijeljenu 0, označava se stupac koji ima dodijeljenu 0 u tom retku te se označava redak koji ima dodijeljenu nulu u označenom stupcu. Ponavlja se postupak označavanja stupca koji ima dodijeljenu 0 u označenom retku i označavanje retka koji ima dodijeljenu 0 u označenom stupcu dok se više ne može označiti niti jedan redak ni stupac. Svaki neoznačeni redak i označeni stupac precrtaju se linijom.

Četvrti korak je pronalaženje najmanje vrijednosti, veće od 0, koja nije precrtana linijom. Ta vrijednost dodaje se svim dvostruko precrtanim vrijednostima, a oduzima se od svih neprecrtanih vrijednosti. Vrijednosti koje su samo jednom precrtane se prepisuju. Dobivena je druga reducirana matrica za koju se ponavlja cijeli proces od drugog koraka dok se ne dođe do optimalnog rješenja (po jedna dodijeljena 0 u svakome retku i stupcu).

Poseban slučaj je ako sve "radne" jedinice bez dodijeljenog posla za svaki nedodijeljeni posao imaju reduciranu vrijednost 0 na sjecištima.

2.4.3. Primjena problema asignacije

Problem asignacije može se koristiti u gotovo svim aspektima života. Većinom se koristi za optimalno raspoređivanje ljudi na različite poslove u tvrtkama. Može se koristiti i u prijevozu za raspored dostavnih vozila. Primjena je moguća i u zračnom prijevozu za optimalno raspoređivanje pilota, kopilota i kabinskog osoblja na letove. U edukacijskim ustanovama koristi se za izradu rasporeda nastave i učionica čime se minimiziraju preklapanja u rasporedu. Problem asignacije primjenjuje se i u sportu. Rade se rasporedi koji od ekipa zahtijevaju minimalno putovanje i osiguravaju balansirani raspored. Suci se dodjeljuju na utakmice i natjecanja ovisno o njihovoj stručnosti i kvaliteti te važnosti određene utakmice ili turnira.

3. PRIMJENA METODE LINEARNOG PROGRAMIRANJA

3.1. OPIS PROBLEMA

Turistička agencija Sunturist treba prevesti na plažu Zrće 260 turista u jednoj turi (nijedno vozilo ne smije odraditi dvije ture). Veliki autobusi imaju 50 sjedala, mini-busovi imaju 24 sjedala, a kombi vozila 8 sjedala. Trenutno je deset vozača dostupno za vožnju od kojih samo sedmorica imaju D kategoriju (smiju voziti autobus). Raspoloživa su samo četiri velika autobusa. Trošak vožnje autobusom od 50 sjedala za ovu turu je 27€, mini-busom 16€, a kombi vozilom 6€. Cilj je prevesti sve putnike u jednoj turi uz što manji ukupni trošak.

3.2. RJEŠAVANJE METODOM LINEARNOG PROGRAMIRANJA

Matematički model u standardnom obliku :

$MinZ = 27x_1 + 16x_2 + 6x_3$

uz ograničenja :

(1) $50x_1 + 24x_2 + 8x_3 \geq 260$

$x_1 + x_2 + x_3 \leq 10$

$x_1 + x_2 \leq 7$

$x_1 \leq 4$

(2) $x_1, x_2, x_3 \geq 0$

Matematički model u kanonskom obliku :

$MinZ = 27x_1 + 16x_2 + 6x_3 + 0u_1 + 0u_2 + 0u_3 + 0u_4 + 100v_1$

uz ograničenja :

(1) $50x_1 + 24x_2 + 8x_3 - u_1 + v_1 = 260$

$x_1 + x_2 + x_3 + u_2 = 10$

$x_1 + x_2 + u_3 = 7$

$x_1 + u_4 = 4$

(2) $x_1, x_2, x_3 \geq 0;\ u_1, u_2, u_3, u_4 \geq 0;\ v_1 = 0$

Za koeficijent umjetne varijable v_1 korišteno je $M = 100$

Tablica 2. Postupak rješavanja zadanog problema simpleks tablicom

Redni broj	Koef.	Baza	c_j	27	16	6	0	0	0	0	100	R
			A_0	A_1	A_2	A_3	U_1	U_2	U_3	U_4	V_1	
1.	100	V_1	260	50	24	8	-1	0	0	0	1	26/5
2.	0	U_2	10	1	1	1	0	1	0	0	0	10
3.	0	U_3	7	1	1	0	0	0	1	0	0	7
4.	0 ⟸	U_4	4	$\boxed{1}$	0	0	0	0	0	1	0 ⟸	4
	z_j		26000	5000	2400	800	-100	0	0	0	100	
	z_j-c_j		-	4973	2384	794	-100	0	0	0	0	
1.	100 ⟸	V_1	60	0	$\boxed{24}$	8	-1	0	0	-50	1 ⟸	5/2
2.	0	U_2	6	0	1	1	0	1	0	-1	0	6
3.	0	U_3	3	0	1	0	0	0	1	-1	0	3
4.	**27**	$\mathbf{A_1}$	**4**	**1**	**υ**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	∞
	z_j		6108	27	2400	800	-100	0	0	-4973	100	
	z_j-c_j		-	0	2384	794	-100	0	0	-4973	100	
1.	**16**	$\mathbf{A_2}$	**5/2**	**0**	**1**	**1/3**	**-1/24**	**0**	**0**	**-25/12**	**1/24**	
2.	0	U_2	7/2	0	0	2/3	1/24	1	0	13/12	-1/24	
3.	0	U_3	1/2	0	0	-1/3	1/24	0	1	13/12	-1/24	
4.	27	A_1	4	1	0	0	0	0	0	1	0	
	z_j		148	27	16	16/3	-2/3	0	0	-19/3	2/3	
	z_j-c_j		-	0	0	-2/3	-2/3	0	0	-19/3	-298/3	

Izvor: izradio student

$MinZ$ = 148€

x_1 = 4 velika autobusa

x_2 = 2,5 mini-busa

x_3 = 0 kombi vozila

u_1 = 0 putnika

u_2 = 3,5 vozača

u_3 = 0,5 vozača

u_4 = 0 velikih autobusa

y_1 = 2/3€

y_2, y_3 = 0 €

y_4 = -19/3€

Linear Programming Results

1000 Solution

	X1	X2	X3		RHS	Dual
Minimize	27	16	6			
Constraint 1	50	24	8	>=	260	-,67
Constraint 2	1	1	1	<=	10	0
Constraint 3	1	1	0	<=	7	0
Constraint 4	1	0	0	<=	4	6,33
Solution	4	2,5	0		148	

Slika 1. Prikaz rješenja metodom linearnog programiranja koristeći računalni program QM for Windows

3.3. ANALIZA REZULTATA

Rješavanjem ovog problema simpleks metodom linearnog programiranja dobiveno je optimalno rješenje u kojemu je trošak 148 eura. U optimalnom rješenju koriste se 4 autobusa od 50 sjedala, 2.5 autobusa od 24 sjedala te 0 kombi vozila od 8 sjedala. Budući da broj autobusa mora biti cijeli broj, dobiveno rješenje mora se dodatno analizirati. Zaključuje se da broj mini-busova mora biti 2 ili 3 te ovisno o tome odlučuje se koliko kombi vozila je potrebno. Korištenje 0 ili 1 mini-busa ne bi imalo smisla jer mini-bus može prevesti jednaki broj ljudi (24) kao i tri kombi vozila, a trošak prijevoza mini-busa je 16€, dok je trošak prijevoza trima kombi vozilima $6€\cdot 3 = 18€$.

Uzima se u obzir prvi slučaj da je broj mini-busova 2, a broj velikih autobusa ostaje 4. Ukupan broj prevezenih ljudi sa 6 autobusa je $50\cdot 4 + 24\cdot 2 = 248$ putnika što znači da nedostaju kapaciteti prijevoza za dvanaestero ljudi. Budući da jedno kombi vozilo ima mjesta za osmero ljudi, zaključuje se da su potrebna dva kombija da bi se prevezlo dvanaest ljudi te da će četiri mjesta ostati neiskorištena. Ukupan trošak u tom slučaju bi bio $27€\cdot 4 + 16€\cdot 2 + 6€\cdot 2 = 152€$.

Druga mogućnost je da se iskoriste 3 mini-busa i nijedan kombi. U tom slučaju kapacitet vozila iznosi $50\cdot 4 + 24\cdot 3 + 8\cdot 0 = 272$ putnika. Zaključuje se da u ovom slučaju ostaje dvanaest neiskorištenih mjesta. Ukupan trošak u ovom slučaju iznosio bi $27€\cdot 4 + 16€\cdot 3 + 6€\cdot 0 = 156€$.

Iz gore navedenoga proizlazi zaključak da je bolja prva opcija gdje se koriste 4 velika autobusa, 2 mini-busa te 2 kombi vozila. Ukupan trošak u tom slučaju je 152 eura i to je optimalno rješenje ovoga problema. Iz navedenoga se primjećuje da se rješavanjem ovog problema koristeći simpleks metodu linearnog programiranja ne dolazi do optimalnog rješenja, tj. optimalno rješenje do kojega se dolazi nije primjenjivo u praksi zbog toga što broj autobusa ne može biti 2.5 (mora biti pozitivan cijeli broj). Do optimalnoga rješenja može se doći korištenjem Gomorijevog reza na finalnu tablicu do koje se došlo korištenjem simpleks metode linearnog programiranja. Na konkretnome primjeru vidljiva je manjkavost metode linearnog programiranja koja na stvarnim primjerima ne može uvijek dati realno optimalno rješenje, a pogotovo kada se radi o primjerima prijevoza gdje se koriste prijevozna sredstva.

Za ovaj primjer bolji način bi bio koristiti metodu cjelobrojnog programiranja kod kojega kao rezultat nekoga problema u obzir mogu doći samo cjelobrojna rješenja. Iz slike 2., na kojoj je rješenje dobiveno sa računalnim programom, može se iščitati optimalno rješenje ovoga problema koristeći metodu cjelobrojnog programiranja:

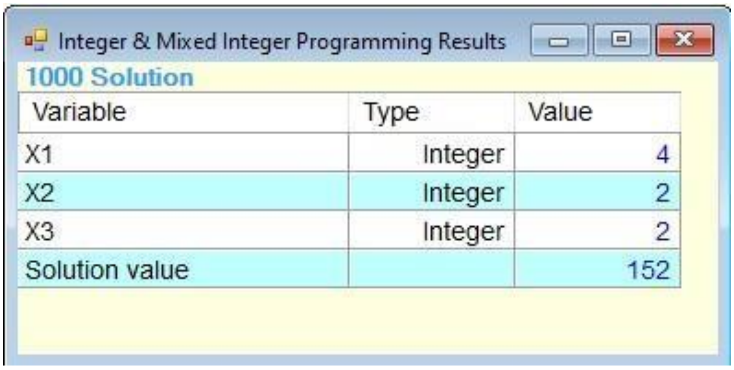
x_1 = 4 velika autobusa

x_2 = 2 mini-busa

x_3 = 2 kombi vozila

$MinZ = 27€\cdot 4 + 16€\cdot 2 + 6€\cdot 2$

$MinZ = 152€$


Integer & Mixed Integer Programming Results

1000 Solution

Variable	Type	Value
X1	Integer	4
X2	Integer	2
X3	Integer	2
Solution value		152

Slika 2. Prikaz rješenja metodom cjelobrojnog programiranja iz računalnog programa QM for Windows

Iz slike 3. mogu se vidjeti iteracije prilikom dobivanja optimalnog rješenja koristeći metodu cjelobrojnog programiranja. Kao osnova (prva iteracija, nulti level) za cjelobrojno programiranje koristi se optimalno rješenje dobiveno metodom linearnog programiranja. Optimalno rješenje dobiveno metodom linearnog programiranja postepeno se mijenja prilikom traženja optimalnog rješenja metodom cjelobrojnog programiranja. Pojedina rješenja odbacuju se jer su neizvediva, a pojedina se odbacuju jer rezultat nisu cijeli brojevi. Testiranjem rješenja zaključuje se da je rješenje gdje se koriste 4 velika autobusa, 2 mini-busa te 2 kombi vozila optimalno jer sva rješenja koja imaju manji ukupan trošak nisu cjelobrojna, a sva ostala cjelobrojna rješenja imaju veći ukupan trošak.

Iteration Results

1000 Solution

Iteration	Level	Added constraint	Solution type	Solution Value	X1	X2	X3
			Optimal	152	4	2	2
1	0		NONinteger	148	4	2,5	0
2	1	X2<= 2	NONinteger	149	4	2	1,5
3	2	X3<= 1	Infeasible				
4	2	X3>= 2	NONinteger	149,33	4	1,83	2
5	3	X2<= 1	NONinteger	151	4	1	4,5
6	4	X3<= 4	Infeasible				
7	4	X3>= 5	NONinteger	151,33	4	,83	5
8	5	X2<= 0	Infeasible				
9	5	X2>= 1	NONinteger	151,84	3,92	1	5
10	6	X1<= 3	Infeasible				
11	6	X1>= 4	INTEGER	154	4	1	5
12	3	X2>= 2	NONinteger	149,84	3,92	2	2
13	4	X1<= 3	Infeasible				
14	4	X1>= 4	INTEGER	152	4	2	2
15	1	X2>= 3	NONinteger	149,52	3,76	3	0
16	2	X1<= 3	Suboptimal	155,5	3	4	1,75
17	2	X1>= 4	Suboptimal	156	4	3	0

Slika 3. Prikaz iteracija cjelobrojnog programiranja iz računalnog programa QM for Windows

4. PRIMJENA METODE TRANSPORTNOG PROBLEMA

4.1. OPIS PROBLEMA

Turistička agencija Sunturist ima 15 vozila koja su nakon odrađivanja prijašnjih zadataka ostala na tri različite pozicije u Novalji. Ta ista vozila potrebna su za prijevoz ljudi na plažu Zrće. Ljudi čekaju na 4 različite stanice od kojih svaka stanica ima različitu udaljenost do plaže. Udaljenost (u kilometrima) između trenutnih pozicija vozila i stanica na kojima ljudi čekaju prikazana je u Tablici 3. U Tablici 4 su prikazane ponuda i potražnja na svakom pojedinom ishodištu (pozicije gdje se trenutno nalaze vozila) te svakom pojedinom odredištu (stanice na kojima ljudi čekaju prijevoz). Cilj je prevesti sve ljude do plaže Zrće tako da vozila prijeđu čim manju kilometražu uz minimalan trošak.

Tablica 3. Prikaz udaljenosti (u kilometrima) ishodišta i odredišta

	O_1	O_2	O_3	O_4
I_1	6	6	5	7
I_2	4	4	2	3
I_3	5	2	7	6

Izvor: izradio student

Prva stanica udaljena je od plaže Zrće 4 kilometra, druga stanica udaljena je 5 kilometara, treća stanica udaljena je 2 kilometra, a četvrta stanica udaljena je 6 kilometara. Na već prikazane udaljenosti između ishodišta i odredišta potrebno je dodati udaljenosti između svakog odredišta i plaže da bi se točno izračunala ukupna prijeđena kilometraža svih vozila. Ukupna udaljenost (jedinični trošak u kilometrima) koje svako vozilo mora prijeći, ovisno o početnoj točki i stanici na kojoj će ukrcati ljude, do plaže prikazana je u Tablici 4.

Tablica 4. Matrica transporta zadanog problema

	O_1	O_2	O_3	O_4	Ponuda
I_1	10	11	7	13	4
I_2	8	9	4	9	7
I_3	9	7	9	12	4
Potražnja	2	3	6	4	15/15

Izvor: izradio student

Početno rješenje postavljeno je korištenjem metode sjeverozapadnog kuta, dok se za poboljšanje početnog rješenja i dolaska do optimalnog rješenja koristi metoda "skakanja s kamena na kamen".

4.2. RJEŠAVANJE TRANSPORTNOG PROBLEMA NA PRIMJERU

Tablica 5. Prvo bazično rješenje postavljeno metodom SZ kuta

	O_1	O_2	O_3	O_4	Ponuda
I_1	$\boxed{10}$ 2	$\boxed{11}$ 2	$\boxed{7}$	$\boxed{13}$	4
I_2	$\boxed{8}$	$\boxed{9}$ 1	$\boxed{4}$ 6	$\boxed{9}$	7
I_3	$\boxed{9}$	$\boxed{7}$	$\boxed{9}$	$\boxed{12}$ 4	4
Potražnja	2	3	6	4	15/15

Izvor: izradio student

Za korištenje metode "skakanja s kamena na kamen" potrebno je zadovoljiti uvjet: broj kamena = $m - n + 1$. U ovom primjeru $m - n + 1 = 6$ zbog čega je potrebno dodati kamen koji ima vrijednost 0 na proizvoljnu poziciju. Nakon dodavanja nultog kamena računaju se relativni troškovi. Promatra se polje s najvećim relativnim troškom jer se dodjeljivanjem jedinica na tu relaciju postiže najveća ušteda. U ovom slučaju to je polje (2,4) s relativnim troškom 5, pri čemu se ostvaruje ušteda od 5 km pomnožena sa brojem vozila prebačenih na to polje.

Tablica 6. Postupak transformacije prvog bazičnog rješenja u drugo

	O_1	O_2	O_3	O_4	Ponuda
I_1	$\boxed{10}$ 2	$\boxed{11}$ 2	$\boxed{7}$ -1	$\boxed{13}$ 3	4
I_2	$\boxed{8}$ 0	$\boxed{9}$ + 1	$\boxed{4}$ 6	$\boxed{9}$ 5 *	7
I_3	$\boxed{9}$ -3	$\boxed{7}$ - 0	$\boxed{9}$ -7	$\boxed{12}$ 4 +	4
Potražnja	2	3	6	4	15/15

Izvor: izradio student

$Z = 10 \cdot 2 + 11 \cdot 2 + 9 \cdot 1 + 4 \cdot 6 + 12 \cdot 4$

$Z = 123$ kilometra

Postupak se ponavlja, opet se računaju relativni troškovi te traži relacija/polje s najvećim relativnim troškom, u ovom slučaju polje (1,3) s relativnim troškom 4.

Tablica 7. Drugo bazično rješenje

	O_1	O_2	O_3	O_4	Ponuda
I_1	10 2	11 2 +	7 4 *	13 3	4
I_2	8 -5	9 -5	4 6 +	9 1 -	7
I_3	9 -3	7 1 -	9 -2	12 3 +	4
Potražnja	2	3	6	4	15/15

Izvor: izradio student

$Z = 10 \cdot 2 + 11 \cdot 2 + 4 \cdot 6 + 9 \cdot 1 + 7 \cdot 1 + 12 \cdot 3$

$Z = 118$ kilometara

U drugom bazičnom rješenju ukupan trošak je 118 km (u prvom je bilo 123 km). Nastala je ušteda od 5 km pomnoženo sa jednim vozilom koji je prebačen na to polje.

Tablica 8. Treće bazično rješenje

	O_1	O_2	O_3	O_4	Ponuda
I_1	10 2 +	11 -4	7 2 -	13 -1	4
I_2	8 -1	9 -5	4 4 +	9 3 -	7
I_3	9 1 *	7 3	9 -2	12 1 +	4
Potražnja	2	3	6	4	15/15

Izvor: izradio student

$Z = 10 \cdot 2 + 7 \cdot 2 + 4 \cdot 4 + 9 \cdot 3 + 7 \cdot 3 + 12 \cdot 1$

$Z = 110$ kilometara

U odnosu na drugo bazično rješenje u trećem bazičnom rješenju ukupni troškovi su manji za 8 km iz razlog što je na polje sa najvećim relativnim troškom (4) prebačen kamen sa 2 jedinice/vozila što u umnošku iznosi 8.

Izračunom relativnih troškova u četvrtom bazičnom rješenju (Tablica 9) uočava se da su relativni troškovi na svim neiskorištenim relacijama negativni što znači da je postignuto optimalno rješenje, jer nema više mogućnosti uštede odnosno smanjenja ukupnih troškova.

Tablica 9. Četvrto bazično rješenje – optimalno rješenje

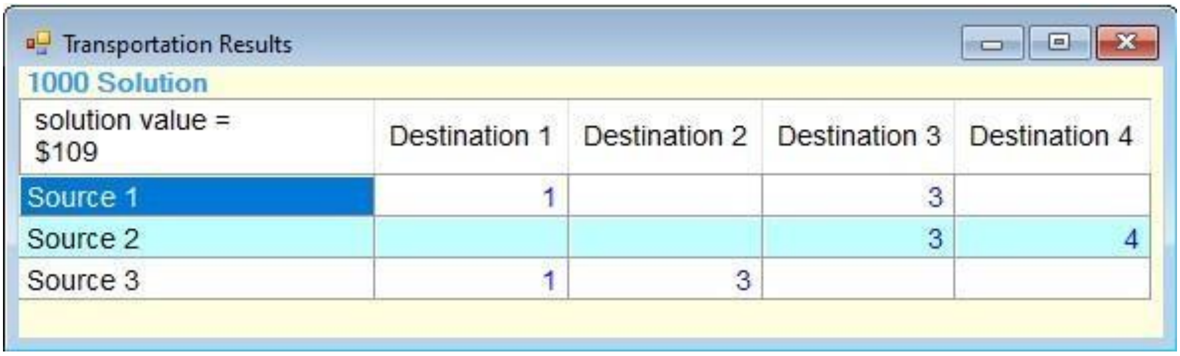
	O_1	O_2	O_3	O_4	Ponuda
I_1	$\boxed{10}$ 1	$\boxed{11}$ -3	$\boxed{7}$ 3	$\boxed{13}$ -1	4
I_2	$\boxed{8}$ -1	$\boxed{9}$ -4	$\boxed{4}$ 3	$\boxed{9}$ 4	7
I_3	$\boxed{9}$ 1	$\boxed{7}$ 3	$\boxed{9}$ -3	$\boxed{12}$ -1	4
Potražnja	2	3	6	4	15/15

Izvor: izradio student

$MinZ = 10 \cdot 1 + 7 \cdot 3 + 4 \cdot 3 + 9 \cdot 4 + 9 \cdot 1 + 7 \cdot 3$

$MinZ = 109$ kilometara

Slika 4 prikazuje ispis optimalnog rješenja dobivenog sa računalnim programom.


Transportation Results

1000 Solution

solution value = $109	Destination 1	Destination 2	Destination 3	Destination 4
Source 1	1		3	
Source 2			3	4
Source 3	1	3		

Slika 4. Prikaz rješenja transportnog problema iz računalnog programa QM for Windows

4.3. ANALIZA REZULTATA

Optimalno rješenje glasi:

$MinZ$ = 109 kilometara

x_{11} = 1 vozilo, x_{13} = 3 vozila

x_{23} = 3 vozila, x_{24} = 4 vozila

x_{31} = 1 vozilo, x_{23} = 3 vozila

Rješavanjem zadanog problema dobiveno je optimalno rješenje koje iznosi 109 kilometara. Kroz tri iteracije od početnog programa/rješenja gdje je ukupna kilometraža iznosila 123 kilometra metodom "skakanja s kamena na kamen" postepenim poboljšanjima dobiveno je optimalno rješenje. Obzirom da su u zadnjoj tablici svi relativni troškovi negativni zaključuje se da je postignuto optimalno rješenje, a s obzirom da nijedan relativan trošak nije 0 zaključuje se da postoji samo jedno optimalno rješenje, odnosno da nema alternativnih optimalnih rješenja.

5. PRIMJENA METODE ASIGNACIJE

5.1. OPIS PROBLEMA

Turistička agencija Sunturist trenutno ima pet slobodnih radnika koje treba rasporediti na pet poslova na način da ukupno utrošeno vrijeme bude minimalno. Poslovi su:

1) učitati tahografske listiće
2) očistiti apartman
3) odvesti goste do apartmana
4) pripremiti bicikle za nadolazeću biciklističku turu
5) napumpati SUP-ove.

Vrijeme (u minutama) koje je potrebno svakom radniku za pojedini posao prikazano je u sljedećoj tablici:

Tablica 10. Prikaz potrebnog vremena za obavljanje posla (u min)

	Osoba 1	Osoba 2	Osoba 3	Osoba 4	Osoba 5
Posao 1	37	33	29	28	21
Posao 2	50	60	48	51	47
Posao 3	19	20	20	21	19
Posao 4	31	33	33	36	28
Posao 5	38	40	45	43	42

Izvor: izradio student

5.2. RJEŠAVANJE PROBLEMA ASIGNACIJE NA PRIMJERU

Za rješavanje problema korištena je mađarska metoda. Za početak je potrebno zadanu matricu svesti na prvu reduciranu matricu (matrica u kojoj svaki redak i svaki stupac imaju barem jednu nulu).

Tablica 11. Svođenje na prvu reduciranu matricu (1)

	Osoba 1	Osoba 2	Osoba 3	Osoba 4	Osoba 5	u_i
Posao 1	37	33	29	28	21	21
Posao 2	50	60	48	51	47	47
Posao 3	19	20	20	21	19	19
Posao 4	31	33	33	36	28	28
Posao 5	38	40	45	43	42	38

Izvor: izradio student

Tablica 12. Svođenje na prvu reduciranu matricu (2)

	Osoba 1	Osoba 2	Osoba 3	Osoba 4	Osoba 5
Posao 1	16	12	8	7	0
Posao 2	3	13	1	4	0
Posao 3	0	1	1	2	0
Posao 4	3	5	5	8	0
Posao 5	0	2	7	5	4
v_j		1	1	2	

Izvor: izradio student

Nakon svođenja na prvu reduciranu matricu mađarskom metodom, koja je objašnjena u ranijem dijelu rada, dodjeljuju se nule te označavaju i precrtavaju određeni retci i stupci.

Tablica 13. Prva reducirana matrica

					*	
	Osoba 1	Osoba 2	Osoba 3	Osoba 4	Osoba 5	
Posao 1	16	11	7	5	$\boxed{0}$	*
Posao 2	3	12	$\boxed{0}$	2	$\cancel{0}$	
Posao 3	$\cancel{0}$	$\boxed{0}$	$\cancel{0}$	$\cancel{0}$	$\cancel{0}$	
Posao 4	3	4	4	6	$\cancel{0}$	*
Posao 5	$\boxed{0}$	1	6	3	4	

Izvor: izradio student

Tablica 14. Druga reducirana matrica

	*					
	Osoba 1	Osoba 2	Osoba 3	Osoba 4	Osoba 5	
Posao 1	13	8	4	2	$\boxed{0}$	
Posao 2	3	12	$\boxed{0}$	2	3	
Posao 3	$\cancel{0}$	$\boxed{0}$	$\cancel{0}$	$\cancel{0}$	3	
Posao 4	$\boxed{0}$	1	1	3	$\cancel{0}$	*
Posao 5	$\cancel{0}$	1	6	3	7	*

Izvor: izradio student

Ponavljanjem prethodno navedenog postupka, dolazi se do treće reducirane matrice iz koje se može iščitati optimalno rješenje ovoga problema.

Tablica 15. Treća reducirana matrica – optimalno rješenje

	Osoba 1	Osoba 2	Osoba 3	Osoba 4	Osoba 5
Posao 1	14	8	4	2	$\boxed{0}$
Posao 2	4	12	$\boxed{0}$	2	3
Posao 3	1	$\cancel{0}$	$\cancel{0}$	$\boxed{0}$	3
Posao 4	0	0	$\cancel{0}$	2	$\cancel{0}$
Posao 5	0	0	5	2	6

Izvor: izradio student

Na Slici 5 je prikaz ispisa računalnog programa za jedno od dva optimalna rješenja, a u analizi rezultata biti će detaljnije objašnjeno zašto postoje i kako glase oba optimalna rješenja.

Assignment Results

1000 Solution

Optimal solution value = 161	Machine 1	Machine 2	Machine 3	Machine 4	Machine 5
Job 1	37	33	29	28	Assign 21
Job 2	50	60	Assign 48	51	47
Job 3	19	20	20	Assign 21	19
Job 4	31	Assign 33	33	36	28
Job 5	Assign 38	40	45	43	42

Slika 5. Prikaz rezultata problema asignacije koristeći računalni program QM for Windows

5.3. ANALIZA REZULTATA

Postepenim reduciranjem matrice dobivena je treća reducirana matrica koja predstavlja optimalno rješenje ovoga problema asignacije. Može se iščitati da je posao učitavanja tahografskih listića dodijeljen osobi 5, da je čišćenje apartmana dodijeljeno osobi 3 te da je vođenje gostiju do apartmana dodijeljeno osobi broj 4. Osobe 1 i 2 te poslovi 4 (pripremanje bicikala za nadolazeću biciklističku turu) i 5 (pumpanje SUP-ova) još uvijek nisu dodijeljeni. Budući da se pojavila situacija u kojoj su ostala dva nedodijeljena posla te dvije osobe kojima treba dodijeliti te poslove, a obje kombinacije ($O_1 \rightarrow P_4$, $O_2 \rightarrow P_5$ te $O_1 \rightarrow P_5$, $O_2 \rightarrow P_4$) imaju reduciranu vrijednost 0, zaključuje se da postoje dva optimalna rješenja koja kao funkciju cilja imaju jednaku vrijednost ukupno utrošenog vremena a koje iznosi 161 minutu.

Promatranjem prve tablice gdje je zadano vrijeme koje je svakoj osobi potrebno za svaki određeni posao vidi se da obje kombinacije ($O_1 \rightarrow P_4$, $O_2 \rightarrow P_5$ i $O_1 \rightarrow P_5$, $O_2 \rightarrow P_4$) imaju jednako ukupno vrijeme obavljanja poslova koje iznosi 71 minutu (31 + 40 = 71; 33 + 38 = 71).

Prema tome, prvo optimalno rješenje glasi: *Min* Z = 161 min i $O_1 \rightarrow P_4$, $O_2 \rightarrow P_5$, $O_3 \rightarrow P_2$, $O_4 \rightarrow P_3$ i $O_5 \rightarrow P_1$. Drugo optimalno rješenje je: *Min* Z = 161 min i $O_1 \rightarrow P_5$, $O_2 \rightarrow P_4$, $O_3 \rightarrow P_2$, $O_4 \rightarrow P_3$ i $O_5 \rightarrow P_1$.

6. ZAKLJUČAK

U ovom radu analizirana je primjena kvantitativnih metoda u poslovanju turističke agencije Sunturist iz Novalje. Korištenjem metode linearnog programiranja, transportnog problema i problema asignacije, identificirani su ključni izazovi s kojima se agencija suočava te su ponuđena optimalna rješenja.

Rezultati su pokazali da primjena kvantitativnih metoda značajno doprinosi optimizaciji poslovnih procesa, posebice u područjima kao što su raspoređivanje vozila i vozača te smanjenje operativnih troškova. Optimizacijom ovih aspekata poslovanja, Sunturist može maksimizirati profit i poboljšati efikasnost svojih usluga.

Analiza je također otkrila da se kvantitativne metode mogu uspješno primijeniti na razne druge poslovne izazove, ne samo unutar turizma, već i šire. Kroz sustavan pristup i primjenu matematičkih modela, moguće je donijeti bolje poslovne odluke koje vode do povećanja ukupne efikasnosti i konkurentnosti na tržištu.

Iako su odabrane metode korištene u ovom radu velika pomoć te značajno olakšavaju i ubrzavaju rješavanje problema s kojima se susreće turistička agencija, dobivene rezultate ne treba slijepo prihvatiti i primijeniti, već je potrebno i poznavanje materije da bi se dobiveni rezultati pravilno primijenili u praksi.

Pored kvantitativnih metoda primijenjenih u ovom radu u znanstvenoj disciplini operacijska istraživanja postoji još veliki broj metoda koje se koriste u raznim slučajevima s obzirom na zadani problem te svaka ima svoju svrhu i područje primjene. S obzirom na sve prednosti koje nude kvantitativne metode preporučuje se daljnje istraživanje i primjena ovih metoda u svakodnevnom poslovanju, čime bi se omogućilo kontinuirano poboljšanje i prilagođavanje promjenjivim uvjetima na tržištu.

LITERATURA

1) KNJIGE

1. Barković, D., *Operacijska istraživanja*, Ekonomski fakultet Osijek, Osijek, 2002.
2. D. Bertsimas, J. N. Tsitsiklis, *Introduction to Linear Optimization,* Massachusetts Institute of Tehnology, Massachusetts, 2008.
3. Lukač, Z., Neralić, L., *Operacijska istraživanja*, Element, Zagreb, 2012.

2) ČLANCI U ČASOPISIMA

1. Zenzerović, Z., *Mogućnosti i uvjeti primjene kvantitativnih metoda u tehnologiji prometa,* Zbornik radova Pomorskog fakulteta, Rijeka, 9 (1995.), str. 37-53.

3) INTERNETSKI IZVORI

1. Chiradeep BasuMallick, What Is Linear Programming? Meaning, Methods, and Examples, 16. prosinca 2022., https://www.spiceworks.com/tech/it-strategy/articles/linear-programming/ (pristupljeno 20.06.2024.)
2. Dr. Prasad A Y, *Transportation Problem and Assignment problem*, 2022., https://www.acsce.edu.in/acsce/wp-content/uploads/2020/03/1585041316993_Module-4.pdf (pristupljeno 27.06.2024.)
3. Vikram Singh, Transportation Problem: Definition, Formulation and Types, 10. lipnja 2024., https://www.shiksha.com/online-courses/articles/transportation-problem-definition-formulation-types-and-method-to-solve/ (pristupljeno 27.06.2024.)
4. Vikram Singh, What is Operations Research?, 27. svibnja 2024., https://www.shiksha.com/online-courses/articles/operations-research-blogId-157427 (pristupljeno 02.07.2024.)
5. Linear Programming, 01. travnja 2024., https://www.geeksforgeeks.org/linear-programming/ (pristupljeno 20.06.2024.)
6. Solution of assignment problems (Hungarian Method), https://www.brainkart.com/article/Solution-of-assignment-problems-(Hungarian-Method)_39044/ (pristupljeno 01.07.2024.)

POPIS TABLICA

Tablica 1. Matrica transporta 8
Tablica 2. Postupak rješavanja zadanog problema simpleks tablicom........ 15
Tablica 3. Prikaz udaljenosti (u kilometrima) ishodišta i odredišta........ 19
Tablica 4. Matrica transporta zadanog problema........ 19
Tablica 5. Prvo bazično rješenje postavljeno metodom SZ kuta 20
Tablica 6. Postupak transformacije prvog bazičnog rješenja u drugo........ 20
Tablica 7. Drugo bazično rješenje........ 21
Tablica 8. Treće bazično rješenje........ 21
Tablica 9. Četvrto bazično rješenje – optimalno rješenje........ 22
Tablica 10. Prikaz potrebnog vremena za obavljanje posla (u min) 24
Tablica 11. Svođenje na prvu reduciranu matricu (1)........ 25
Tablica 12. Svođenje na prvu reduciranu matricu (2)........ 25
Tablica 13. Prva reducirana matrica........ 25
Tablica 14. Druga reducirana matrica 26
Tablica 15. Treća reducirana matrica – optimalno rješenje........ 26

POPIS SLIKA

Slika 1. Prikaz rješenja metodom linearnog programiranja koristeći računalni program QM for Windows 16
Slika 2. Prikaz rješenja metodom cjelobrojnog programiranja iz računalnog programa QM for Windows 17
Slika 3. Prikaz iteracija cjelobrojnog programiranja iz računalnog programa QM for Windows 18
Slika 4. Prikaz rješenja transportnog problema iz računalnog programa QM for Windows 22
Slika 5. Prikaz rezultata problema asignacije koristeći računalni program QM for Windows 27