Pouzdanost i raspoloživost digitalnih sustava

Kraš, Antun; Bonato, Jasminka; Draščić Ban, Biserka

Antun Kraš

Jasminka Bonato

Biserka Draščić Ban

Pouzdanost i raspoloživost digitalnih sustava

Pomorski fakultet

Sveučilišta u Rijeci

Antun Kraš
Jasminka Bonato
Biserka Draščić Ban

POUZDANOST I RASPOLOŽIVOST DIGITALNIH SUSTAVA

Izdavač
Sveučilište u Rijeci
Pomorski fakultet

Autori knjige
dr. sc. Antun Kraš
dr. sc. Jasminka Bonato
dr. sc. Biserka Draščić Ban

Urednica
Vesna Vranić Kauzlarić, dipl. inž.

Recenzenti
dr. sc. Vinko Tomas
dr. sc. Duško Pavletić

Lektura i korektura
Laida Bušljeta, prof.

Priprema i tisak
Redak d.o.o. - Split

ISBN 978-953-165-123-3

Naklada
200 primjeraka

Prvo izdanje

CIP zapis dostupan u računalnom katalogu
Sveučilišne knjižnice Rijeka pod brojem 140321011.

Antun Kraš
Jasminka Bonato
Biserka Draščić Ban

Pouzdanost i raspoloživost digitalnih sustava

uniri

PFRI Pomorski fakultet
Sveučilišta u Rijeci

Rijeka, 2017.

SADRŽAJ

PREDGOVOR

Ovaj je udžbenik prvenstveno namijenjen studentima diplomskog sveučilišnog studija studijskog programa Elektroničke i informatičke tehnologije u pomorstvu ali i drugih studijskih programa na Pomorskom fakultetu Sveučilišta u Rijeci, kao i studentima drugih visokih učilišta na kojima se izučava pouzdanost i raspoloživost tehničkih sustava.

Temeljni je cilj udžbenika uputiti studente u osnove prediktivnog (prognostičkog) matematičkog modeliranja pouzdanosti i raspoloživosti digitalnih tehničkih sustava.

Udžbenik je iz metodičkih razloga podijeljen na sedam poglavlja i dva dodatka.

U prvom je poglavlju dan sažetak tematike kojom se udžbenik bavi.

U drugom se poglavlju, radi jednoznačnog razumijevanja i tumačenja pojmova relevantnih za uspostavljanje prediktivnih matematičkih modela pouzdanosti i raspoloživosti digitalnih tehničkih sustava, daju samo opće definicije i kratka pojašnjenja nekih polaznih pojmova koji se odnose na područje pouzdanosti, obnovljivosti i raspoloživosti digitalnih sustava i njihovih komponenata. Precizne definicije i pojašnjenja ovih i ostalih specifičnih pojmova, u kvalitativnom i kvantitativnom smislu, daju se postupno tijekom izlaganja.

U trećem se poglavlju definira pojam kvara i vremena do kvara binarne komponente kao i veličine, i njihovi međuodnosi, relevantni za uspostavljanje i analizu prediktivnog matematičkog modela pouzdanosti i srednjeg vremena do kvara binarne komponente.

U četvrtom se poglavlju definira pojam obnove i vremena do obnove binarne komponente kao i veličine, i njihovi međuodnosi, relevantni za uspostavljanje i analizu prediktivnog matematičkog modela obnovljivosti i srednjeg vremena do obnove binarne komponente.

U petom se poglavlju preciznije definira pouzdanost višekomponentnih neobnovljivih digitalnih sustava i predstavlja pristup uspostavljanju prediktivnog matematičkog modela pouzdanosti i srednjeg vremena do kvara digitalnih sustava s međusobno neovisnim komponentama kao i međusobno ovisnim komponentama, polazeći od poznavanja strukture te učestalosti kvara komponenata tih sustava.

U šestom se poglavlju preciznije definira pouzdanost višekomponentnih obnovljivih digitalnih sustava i predstavlja pristup uspostavljanju

Markovljevog modela pouzdanosti i srednjeg vremena do kvara, polazeći od poznate strukture te učestalosti kvara i učestalosti obnove komponenata tih sustava.

U sedmom se poglavlju preciznije definira trenutačna, intervalna i asimptotska raspoloživost jednokomponentnog binarnog sustava kao i višekomponentnih digitalnih sustava te predstavlja pristup uspostavljanju Markovljevog modela trenutačne, intervalne i asimptotske raspoloživosti, polazeći od poznate strukture te učestalosti kvara i učestalosti obnove komponenata tih sustava.

Budući da se u prethodnim poglavljima uvode i definiraju pojmovi i veličine, kao i njihovi međuodnosi, čije razumijevanje pretpostavlja poznavanje osnova teorije vjerojatnosti, a uspostavljanje modela pouzdanosti i raspoloživosti digitalnih sustava zahtijeva poznavanje osnovnih obilježja homogenog Markovljevog procesa, udžbenik sadrži Dodatak A, u kojem se izlažu osnove teorije vjerojatnosti i slučajnih procesa s težištem na homogen Markovljev proces.

Nadalje, budući da se pri izvođenju Markovljevih modela pouzdanosti i raspoloživosti digitalnih sustava primjenjuje rješavanje sustava linearnih diferencijalnih jednadžbi uz uporabu Laplaceovih transformacija, udžbenik sadrži i Dodatak B, u kojem se daju osnove Laplaceovih transformacija.

Udžbenik sadrži i nekoliko riješenih elementarnih primjera radi kvantitativne ilustracije teoretskih izlaganja. Međutim, u svrhu potpunijeg kvantitativnog ilustriranja teoretskih izlaganja, bilo bi korisno izdati i prateću metodičku zbirku riješenih primjera i zadataka kao dodatak ovom udžbeniku.

Zahvaljujemo Martini Badurina na suradnji u izradi dijagrama i slika, Jasminu Ćeliću na pomoći pri izradi kazala pojmova te Tihani Kraš na jezičnim savjetima, čime su dali značajan doprinos kvaliteti ovog udžbenika.

Rijeka, studeni 2017.

1. UVOD

Svaki je tehnički sustav osmišljen, projektiran, proizveden, instaliran i uključen u djelovanje te korišten i održavan radi obavljanja definirane funkcije. Ta je funkcija obično uvjetovana zahtjevima korisnika sustava.

Za tehnički se sustav koji uključenjem u djelovanje ima sposobnost obavljanja i obavlja definiranu funkciju kaže da se nalazi u **radnom stanju**. Međutim, u bilo kojem trenutku tijekom njegovog djelovanja sustav može izgubiti sposobnost obavljanja definirane funkcije. Tada se obično kaže da se dogodio **kvar** sustava. Taj događaj karakterizira trenutačni prelazak sustava iz radnog u **kvarno stanje**. Naravno, poželjno je da vrijeme do nastupa tog događaja, koje se naziva **vremenom do kvara**, bude što dulje. Za sustav kod kojeg je to vrijeme, promatrano statistički, dulje kaže se da ima veću **pouzdanost** od sustava kod kojeg je to vrijeme kraće.

Većina se tehničkih sustava može nakon nastupa kvara odgovarajućim zahvatima i uporabom primjerene logističke podrške vratiti iz kvarnog u radno stanje. Za takve se sustave kaže da su **obnovljivi**, a aktivnost vraćanja sustava iz kvarnog u radno stanje naziva se **obnavljanjem**. Obnavljanje sustava traje do trenutka kad on ponovno stekne sposobnost obavljanja zahtijevane funkcije, odnosno kad ponovno postigne radno stanje. Događaj karakteriziran trenutačnim prelaskom sustava iz kvarnog u radno stanje obično se naziva **obnovom** sustava, a vrijeme koje proteče od trenutka početka obnavljanja do trenutka nastupa obnove sustava, naziva se **vremenom do obnove**. Naravno, poželjno je da to vrijeme bude što kraće. Za sustav kod kojeg je to vrijeme, promatrano statistički, kraće kaže se da ima veću **obnovljivost** od sustava kod kojeg je to vrijeme dulje.

U djelovanju nekog obnovljivog tehničkog sustava koji je stalno uključen u djelovanje uzastopno se izmjenjuju kvarovi i obnove sustava, odnosno njegova radna i kvarna stanja s pripadnim vremenima do kvara i vremenima do obnove. To predstavlja određen **slučajni proces**. Ako je u nekom promatranom razdoblju odvijanja tog procesa ukupno vrijeme do kvara veće od ukupnog vremena do obnove sustava, za sustav se kaže da ima veću **raspoloživost** u tom razdoblju. Takav sustav ima i veću šansu da se u proizvoljnom trenutku tijekom promatranog razdoblja zateče u radnom stanju.

Kvarovi i obnove sustava trenutačni su slučajni događaji, odnosno pridružena im je pripadna vjerojatnost nastupa, a vremena do kvara i vremena do obnove kontinuirane su slučajne veličine kojima su pridružene pripadne razdiobe vjerojatnosti. Zbog toga su matematički modeli pouzdanosti i raspoloživosti tehničkih sustava koji se temelje na ovim događajima odnosno veličinama vjerojatnosni i služe za prediktivnu analizu njihove pouzdanosti i raspoloživosti tijekom njihovog ostvarivanja kao i pronalaženje odgovarajućih tehničkih i drugih rješenja za povećavanje učinkovitosti i ekonomičnosti njihovog djelovanja.

2. POLAZNI OPĆI POJMOVI

Radi jednoznačnog razumijevanja i tumačenja pojmova relevantnih za uspostavljanje prediktivnih (prognostičkih) matematičkih modela pouzdanosti i raspoloživosti digitalnih tehničkih sustava, u ovom se poglavlju daju opće definicije i kratka pojašnjenja nekih polaznih pojmova koji se odnose na područje pouzdanosti, obnovljivosti i raspoloživosti sustava i njihovih sastavnica. Precizne definicije i pojašnjenja ovih i ostalih specifičnih pojmova, u kvalitativnom i kvantitativnom smislu, daju se postupno tijekom izlaganja.

2.1 Tehnički sustav i komponente

Svaki se **tehnički sustav** može, u najopćenitijem smislu, tretirati kao skup međusobno fizički i/ili funkcijski spregnutih sklopovskih, programskih ili sklopovsko-programskih sastavnica. U funkcijskom smislu, svaki je tehnički sustav karakteriziran obavljanjem definirane **integralne funkcije**.

Sastavnice tehničkog sustava koje se u fizičkom i/ili funkcijskom smislu tretiraju kao **elementarne (nedjeljive) cjeline** nazivaju se **komponentama sustava**. U funkcijskom smislu, svaka komponenta sustava obavlja definiranu **elementarnu funkciju**. Koordiniranom interakcijom definiranih elementarnih funkcija komponenata sustava ostvaruje se definirana integralna funkcija tehničkog sustava. Koordinirane interakcije definiranih elementarnih funkcija komponenata sustava ostvaruju se preko **međukomponentnih sučelja**. Jednoznačnim definiranjem elementarnih funkcija komponenata i međukomponentnih sučelja definirana je i **najniža razina funkcijskog razlaganja i funkcijske analize tehničkog sustava.**

Definiranjem vanjske fizičke i/ili funkcijske granice tehničkog sustava ujedno je definirana fizička i/ili funkcijska granica između tog sustava i njegovog okružja. Ova granica predstavlja **sučelje između tehničkog sustava i njegovog okružja**. Njime se ostvaruje fizička i/ili funkcijska **interakcija između sustava i njegovog okružja**.

2.2 Binarne komponente

Ako se komponente nekog tehničkog sustava u bilo kojem trenutku tijekom njegovog djelovanja mogu nalaziti u samo jednom od **dva moguća međusobno isključiva stanja**, od kojih u jednom **imaju sposobnost**, a u drugom **nemaju sposobnost** obavljanja definirane elementarne funkcije, predstavljaju **binarne komponente** (u daljnjem tekstu: **komponente**).

Kad komponenta uključena u djelovanje ima sposobnost i obavlja definiranu elementarnu funkciju, kaže se da se, s funkcijskog stanovišta, nalazi u **radnom stanju**. Nasuprot tome, ako komponenta uključena u djelovanje nema sposobnost za obavljanje i ne obavlja definiranu elementarnu funkciju kaže se da se, s funkcijskog stanovišta, nalazi u **kvarnom stanju.**

2.3 Digitalni sustav

U elementarnom smislu, tehnički sustav koji tvori samo jedna komponenta, predstavlja **jednokomponentni tehnički sustav**. Takav se sustav može, u proizvoljnom trenutku tijekom svog djelovanja, nalaziti u samo jednom od dva moguća međusobno isključiva funkcijska stanja od koji je jedno **radno**, a drugo **kvarno**, odnosno ima ili nema sposobnost obavljanja definirane integralne funkcije.

Međutim, tehnički sustav koji tvore najmanje dvije komponente može se u proizvoljnom trenutku tijekom svog djelovanja, ovisno od njegovoj unutarnjoj strukturi i zatečenoj kombinaciji stanja tih komponenata, nalaziti u najmanje četiri međusobno isključiva stanja, od kojih u nekima ima, a u nekima nema sposobnost obavljanja definirane funkcije. Budući da su ta stanja diskretna i prebrojiva, takav sustav predstavlja **digitalni tehnički sustav s binarnim komponentama** (u daljnjem tekstu: **sustav**).

Mogući broj stanja sustava određen je brojem komponenata. Ako se s m označi broj komponenata, broj n mogućih stanja sustava određen je izrazom

$$n = 2^m \tag{2.1}$$

Sve moguće kombinacije stanja komponenata u kojima sustav ima sposobnost obavljanja definirane integralne funkcije čine **skup radnih stanja sustava**, dok preostale kombinacije stanja komponenata u kojima sustav nema tu sposobnost čine **skup kvarnih stanja sustava**.

Budući da su tijekom djelovanja sustava sva moguća stanja tog sustava međusobno isključiva, mogući je broj stanja sustava jednak zbroju svih stanja iz skupa radnih i skupa kvarnih stanja sustava.

2.4 Nezalihosni i zalihosni sustavi

Nezalihosni je onaj sustav čija je sposobnost obavljanja definirane integralne funkcije u proizvoljnom trenutku tijekom njegovog djelovanja uvjetovana sposobnošću obavljanja definirane elementarne funkcije svih njegovih komponenata u tom trenutku.

Zalihosni je onaj sustav koji u proizvoljnom trenutku tijekom svog djelovanja može imati sposobnost obavljanja definirane integralne funkcije i pored toga što neke (ne bilo koje) njegove komponente nemaju sposobnost obavljanja definirane elementarne funkcije.

2.5 Održavanje i obnavljanje sustava

Održavanje sustava predstavlja kombinaciju izvođenja svih tehničkih i upravljačkih aktivnosti, uključujući i aktivnosti nadzora, sa svrhom zadržavanja sustava u stanju ili vraćanja sustava u stanje u kojem ima sposobnost obavljanja definirane integralne funkcije.

Polazeći od gornje definicije, u osnovi se razlikuju dvije vrste održavanja sustava: preventivno i korektivno.

Preventivno održavanje sustava čini sveukupna aktivnost koja se izvodi na sustavu u skladu s unaprijed određenim vremenskim rasporedom (**redovno održavanje**) ili u skladu s unaprijed utvrđenim kriterijima i tehničkim stanjem komponenata sustava (**održavanje prema stanju**) radi smanjenja vjerojatnosti nastupa kvarnog stanja sustava. Između ostalog, svrha je preventivnog održavanja otkrivanje i vraćanje u radno stanje prikrivenih kvarnih komponenata zalihosnih sustava.

Korektivno održavanje sustava čini sveukupna aktivnost koja se izvodi na sustavu nakon nastupa njegovog kvarnog stanja sa svrhom ponovnog uspostavljanja njegovog radnog stanja. Pritom se podrazumijeva da se korektivnim održavanjem sustav dovodi u stanje „dobar kao nov”. Pretpostavljajući zanemarivo logističko kašnjenje, korektivno održavanje obuhvaća samo vrijeme potrebno za dijagnosticiranje, lokaliziranje i otklanjanje uzroka kvara te završnu provjeru funkcijske sposobnosti sustava. Takvo se korektivno održavanje naziva **obnavljanjem sustava**.

2.6 Logistička podrška sustava

Općento*,* **logistička podrška sustava** predstavlja sve, materijalno i nematerijalno, što je potrebno poduzimati, osiguravati i koristiti za učinkovitu i ekonomičnu uporabu sustava nakon njegovog uključenja u djelovanje. Da bi se to postiglo, logistička se podrška sustava osmišljava i pretežno osigurava do uključenja ili neposredno nakon uključenja sustava u djelovanje.

2.7 Pouzdanost sustava

Pouzdanost sustava značajka je sustava izražena vjerojatnošću da će sustav imati neprekidnu sposobnost obavljanja definirane integralne funkcije pod pretpostavljenim radnim uvjetima u zahtijevanom razdoblju. S kvalitativnog gledišta, pouzdanost se sustava može shvatiti kao njegova sposobnost što duljeg besprekidnog zadržavanja u radnom stanju.

Pojam pouzdanosti odnosi se kako na neobnovljive tako i na obnovljive sustave. Međutim, treba naglasiti da obnavljanje ne utječe na povećanje pouzdanosti nezalihosnih sustava, ali utječe na povećanje pouzdanosti zalihosnih sustava ako se obnavljanje kvarnih komponenata obavi prije nastupa kvarnog stanja takvih sustava.

2.8 Obnovljivost sustava

Obnovljivost sustava značajka je sustava, njegove logističke podrške i resursa obnavljanja izražena vjerojatnošću da će obnavljanje sustava biti obavljeno unutar pretpostavljenog vremena uz poznate postupke obnavljanja i osigurane resurse obnavljanja (naprimjer brojnost i razina osposobljenosti osoblja za izvođenje obnavljanja, ispitno-mjerna oprema, alati, pričuvni dijelovi, potrošni materijali, radni uvjeti) nakon njegovog uključenja u djelovanje. S kvalitativnog gledišta, obnovljivost se sustava može smatrati njegovom sposobnošću što jednostavnijeg i bržeg vraćanja iz kvarnog u radno stanje.

2.9 Raspoloživost sustava

Raspoloživost sustava značajka je sustava izražena vjerojatnošću da će sustav imati sposobnost obavljanja definirane integralne funkcije u pretpostavljenom trenutku ili što dulju sposobnost obavljanja ove funkcije u pretpostavljenom razdoblju tijekom svoje uključenosti u djelovanje. S kvalitativnog stanovišta, raspoloživost se sustava može smatrati njegovom sposobnošću što duljeg boravka u radnom stanju a što kraćeg boravka u kvarnom stanju tijekom njegove uključenosti u djelovanje.

3. KVAR, VRIJEME DO KVARA I POUZDANOST KOMPONENTE

U ovom se poglavlju definira pojam kvara i vremena do kvara komponente kao i veličine, i njihovi međuodnosi, koji su relevantni za uspostavljanje i analizu prediktivnog matematičkog modela pouzdanosti i srednjeg vremena do kvara komponente.

3.1 Kvar i vrijeme do kvara komponente

Kvar i vrijeme do kvara komponente polazni su događaji, odnosno veličine kojima se u kvalitativnom i kvantitativnom smislu opisuju osnovna obilježja komponente tijekom njezinog djelovanja.

3.1.1 Pojam kvara i vremena do kvara komponente

Kvar (engl. *failure*) **komponente** trenutačni je slučajni događaj koji se očituje gubitkom sposobnosti komponente za obavljanje definirane elementarne funkcije.

Vrijeme do kvara (engl. *time to failure, TTF*) **komponente**, označeno s T_F, vrijeme je koje proteče od trenutka njezinog uključenja u djelovanje, odnosno početka obavljanja njezine definirane elementarne funkcije do trenutka nastupa njezinog kvara, odnosno gubitka sposobnosti za obavljanje te funkcije. Budući da kvar komponente može nastupiti u bilo kojem trenutku i to slučajno, vrijeme do kvara komponente slučajna je veličina sa značajkama nenegativne kontinuirane slučajne varijable.

3.1.2 Razdioba vremena do kvara komponente

Razdioba vremena do kvara (engl. *time to failure distribution*) **komponente** vremenski je ovisna veličina, označena s $F(t)$, definirana vjerojatnošću da je vrijeme do kvara komponente T_F manje ili najviše jednako vremenu proteklom od trenutka $t = 0$, odnosno trenutka kad je ispravna komponenta uključena u djelovanje (Høyland i Rausand, 1994). Dakle,

$$F(t) = P\{T_F \leq t\} \tag{3.1}$$

Osnovne su značajke $F(t)$:

(1) $0 \le F(t) \le 1 \quad \text{za} \quad t \ge 0$

(2) $F(0) = 0$; $\lim\limits_{t \to \infty} F(t) = 1$

(3) $F(t)$ je neopadajuća veličina s rastućim vremenom t

3.1.3 Gustoća kvara komponente

Gustoća kvara (engl. *failure density*) **komponente** vremenski je ovisna veličina, označena s $f(t)$, definirana graničnom vrijednošću omjera vjerojatnosti nastupa kvara komponente tijekom vremena Δt koje se nadovezuje na vrijeme t proteklo od trenutka $t = 0$, odnosno trenutka kad je ispravna komponenta uključena u djelovanje, i vremena Δt ako ono teži k nuli. Dakle,

$$f(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P\{t < T_F \le t + \Delta t\}}{\Delta t} \tag{3.2}$$

Osnovne su značajke $f(t)$:

(1) $f(t) \ge 0 \quad \text{za} \quad t \ge 0$

(2) $\int\limits_0^\infty f(t)dt = 1$

Iz definicijskog izraza za gustoću kvara komponente proizlazi da za neko malo Δt vrijedi

$$f(t)\Delta t \approx P(t < T_F \le t + \Delta t)$$

što znači da $f(t)\Delta t$ predstavlja približnu vjerojatnost nastupa kvara komponente tijekom vremena Δt koje se nadovezuje na vrijeme t proteklo od trenutka $t = 0$, odnosno trenutka kad je ispravna komponenta uključena u djelovanje.

3.1.4 Međuodnos razdiobe vremena do kvara i gustoće kvara komponente

Međuodnos razdiobe vremena do kvara i gustoće kvara komponente analogan je međuodnosu funkcije razdiobe i funkcije gustoće kontinuirane slučajne varijable. Naime, polazeći od definicijskog izraza za gustoću kvara, dobiva se da je

$$f(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{P\{t<T_F\le t+\Delta t\}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{F(t+\Delta t)-F(t)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta F(t)}{\Delta t}$$

iz čega proizlazi da je

$$f(t)=\frac{dF(t)}{dt} \tag{3.3}$$

odnosno inverzno

$$F(t)=\int_0^t f(u)du \tag{3.4}$$

3.1.5 *Učestalost kvara komponente*

Učestalost kvara (engl. *failure rate*) **komponente** vremenski je ovisna veličina, označena s $\lambda(t)$, definirana graničnom vrijednošću omjera vjerojatnosti nastupa kvara komponente tijekom vremena Δt koje se nadovezuje na vrijeme t proteklo od trenutka $t=0$, odnosno trenutka uključenja ispravne komponente u djelovanje, i vremena Δt ako ono teži k nuli, pod uvjetom da se komponenta stalno nalazi u radnom stanju dulje od vremena t (Høyland i Rausand, 1994). Dakle,

$$\lambda(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{P\{t<T_F\le t+\Delta t|T_F>t\}}{\Delta t} \tag{3.5}$$

Iz ovog izraza proizlazi da za neko malo Δt vrijedi

$$\lambda(t)\Delta t\approx P\{t<T_F\le t+\Delta t|T_F>t\}$$

što znači da $\lambda(t)\Delta t$ predstavlja približnu vjerojatnost nastupa kvara komponente tijekom vremena Δt koje se nadovezuje na vrijeme t proteklo od trenutka $t=0$, odnosno trenutka uključenja komponente u djelovanje, pod uvjetom da se u tom trenutku komponenta nalazi u radnom stanju.

Kvalitativni vremenski dijagram učestalosti kvara velike populacije statistički identičnih komponenata, prikazan na slici 3.1, ima karakteristični oblik takozvane „krivulje kade“. Na dijagramu su vidljiva tri karakteristična razdoblja tijekom radnog vijeka komponente:

(A) razdoblje s opadajućom učestalošću kvara,

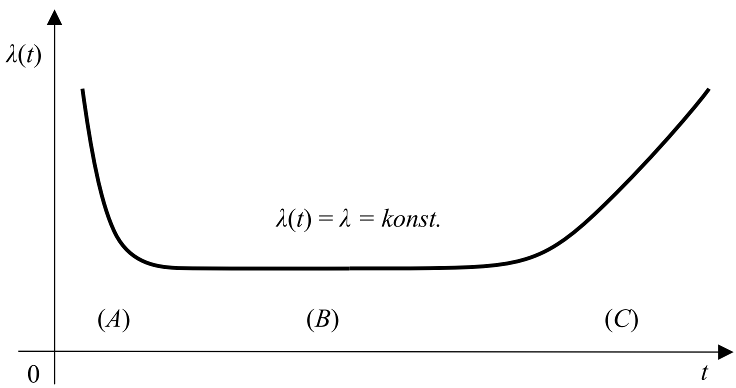
(B) razdoblje s konstantnom učestalošću kvara i

(C) razdoblje s rastućom učestalošću kvara.

Razdoblje s opadajućom učestalošću kvara razdoblje je tzv. **„ranih“ kvarova**, odnosno kvarova koji nastaju u početnom razdoblju radnog vijeka komponente. U tom se razdoblju kvarovi komponente uglavnom pripisuju nedostacima u materijalu i proizvodnom procesu. Ti kvarovi nisu očekivani (za razliku od sistemskih kvarova) i imaju slučajnu razdiobu tijekom vremena.

Razdoblje s konstantnom (ili približno konstantnom) učestalošću kvara razdoblje je kvarova u **„normalnom“ radnom vijeku** komponente. Kvarovi koji nastaju u tom razdoblju uglavnom se pripisuju trenutačnim slučajnim nepoželjnim vanjskim utjecajima na rad komponente.

Razdoblje s rastućom učestalošću kvara razdoblje je tzv. **„kasnih“ kvarova**, odnosno kvarova koji nastaju u završnom razdoblju radnog vijeka komponente. Kvarovi u tom razdoblju uglavnom se pripisuju starosti, istrošenosti, zamoru materijala itd.



(A) razdoblje „ranih“ kvarova
(B) razdoblje „normalnog“ radnog vijeka
(C) razdoblje „kasnih“ kvarova

Slika 3.1. Statistički kvalitativni vremenski dijagram učestalosti kvara komponente

3.1.6 Međuodnos učestalosti kvara i gustoće kvara komponente

Za određivanje međuodnosa učestalosti kvara komponente i gustoće kvara komponente polazi se od definicijskog izraza za učestalost kvara komponente. Uzimajući u obzir pravilo za uvjetnu vjerojatnost te definicijske izraze za gustoću kvara i razdiobu vremena do kvara kao i njihov međuodnos, dobiva se da je

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P\{t < T_F \le t + \Delta t | T_F > t\}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \frac{P\{t < T_F \le t + \Delta t\}}{P\{T_F > t\}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \frac{P\{t < T_F \le t + \Delta t\}}{1 - P\{T_F \le t\}}$$

iz čega proizlazi da je

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)} = \frac{f(t)}{1 - \int_0^t f(u)du} \tag{3.6}$$

Budući da je $0 \le \int_0^t f(u)\, du < 1$ za svako $0 \le t < \infty$, učestalost kvara komponente uvijek je veća od gustoće kvara komponente osim u trenutku $t = 0$, kad su ove dvije veličine međusobno jednake.

3.1.7 Srednje vrijeme do kvara komponente

Polazeći od općeg pravila za određivanje srednje vrijednosti kontinuirane slučajne varijable, **srednje vrijeme do kvara** (engl. *mean time to failure, MTTF*) **komponente** određeno je matematičkim očekivanjem vremena do kvara komponente, označenim s $E[T_F]$, definiranim s

$$MTTF = E[T_F] = \int_0^\infty t f(t) dt \tag{3.7}$$

3.2 Pouzdanost komponente

Pouzdanost komponente temeljna je veličina kojom se u kvalitativnom i kvantitativnom smislu opisuje sposobnost komponente da bez kvara obavlja namijenjenu funkciju tijekom promatranog razdoblja nakon njezinog uključenja u djelovanje.

3.2.1 Pojam i osnovne značajke pouzdanosti komponente

Pouzdanost (engl. *reliability*) **komponente**, u kvantitativnom smislu, vremenski je ovisna veličina, obično označena s $R(t)$, definirana vjerojatnošću da je vrijeme do kvara komponente veće od proizvoljno odabranog vremena t proteklog od trenutka $t = 0$, odnosno trenutka uključenja komponente u djelovanje, pod uvjetom da u tom trenutku komponenta ima sposobnost obavljanja definirane elementarne funkcije (Villemeur, 1992). Dakle,

$$R(t) = P\{T_F > t\} \tag{3.8}$$

Osnovne su značajke $R(t)$:

(1) $0 \leq R(t) \leq 1$ za $t \geq 0$

(2) $R(0) = 1;\ \lim_{t \to \infty} R(t) = 0$

(3) $R(t)$ je nerastuća s rastućim vremenom t

Za određivanje međuodnosa pouzdanosti komponente i razdiobe vremena do kvara komponente polazi se od činjenice da je

$$P\{T_F \leq t\} + P\{T_F > t\} = 1$$

iz čega proizlazi da je

$$P\{T_F > t\} = 1 - P\{T_F \leq t\}$$

Odnosno, polazeći od definicijskih izraza za pouzdanost komponente i razdiobu vremena do kvara komponente, proizlazi da su ove dvije veličine komplementarne, odnosno

$$R(t) = 1 - F(t) \text{ odnosno } F(t) = 1 - R(t) \tag{3.9}$$

3.2.2 Međuodnos pouzdanosti i učestalosti kvara komponente

Polazeći od (3.6) i (3.9), proizlazi da je

$$\lambda(t) = \frac{\frac{dF(t)}{dt}}{R(t)} = \frac{\frac{d[1 - R(t)]}{dt}}{R(t)} = \frac{-\frac{dR(t)}{dt}}{R(t)}$$

odnosno

$$\frac{dR(t)}{R(t)} = -\lambda(t)dt$$

Integrirajući lijevu i desnu stranu jednadžbe i uzimajući u obzir da je $R(0) = 1$, dobiva se da je

$$ln\, R(t) = -\int_0^t \lambda(u)du$$

odnosno konačno

$$R(t)=e^{-\int_0^t \lambda(u)du} \tag{3.10}$$

Ovim je izrazom iskazan međuodnos pouzdanosti i učestalosti kvara komponente.

3.2.3 Međuodnos srednjeg vremena do kvara i pouzdanosti komponente

Uzimajući u obzir međuodnos gustoće kvara i pouzdanosti komponente, dobiva se

$$MTTF=\int_0^\infty t\left[-\frac{dR(t)}{dt}\right]dt=-\int_0^\infty tdR(t)$$

Uvođenjem supstitucija $t=u$ i $dR=dv$ i primjenom pravila za parcijalnu integraciju dobiva se

$$MTTF=\int_0^\infty R(t)dt-\left[tR(t)\right]_0^\infty$$

Uvažavajući činjenicu da je

$$\lim_{t\to\infty}\left[tR(t)\right]=0$$

proizlazi da je

$$MTTF=\int_0^\infty R(t)dt \tag{3.11}$$

Ovaj izraz omogućava određivanje srednjeg vremena do kvara komponente pomoću poznate pouzdanosti komponente.

S druge strane, srednje vrijeme do kvara komponente može se odrediti i primjenom Laplaceove transformacije funkcije pouzdanosti $R(t)$. Naime, Laplaceov transformat funkcije pouzdanosti, označen s $R^*(s)$, definiran je izrazom

$$R^*(s)=\int_0^\infty R(t)e^{-st}dt \tag{3.12}$$

Ako se u ovaj izraz uvrsti da je $s=0$, dobiva se

$$R^*(0)=\int_0^\infty R(t)dt \tag{3.13}$$

što je zapravo izraz za $MTTF$.

Ovaj izraz pokazuje da izraz za Laplaceov transformat $R^*(s)$ funkcije pouzdanosti $R(t)$ daje izraz za srednje vrijeme do kvara komponente *MTTF,* ako se u taj izraz uvrsti $s = 0$.

Važno je napomenuti da izrazi (3.11) i (3.13) vrijede i općenito, odnosno za određivanje srednjeg vremena do kvara bilo kojeg (obnovljivog ili neobnovljivog) višekomponentnog sustava, ako je poznata njegova funkcija pouzdanosti. Pritom, ako se s $R_S(t)$ označi pouzdanost, a s $MTTF_S$ srednje vrijeme do kvara promatranog sustava, analogno izrazima (3.11) i (3.13) vrijedi

$$MTTF_S = \int_0^\infty R_S(t)dt \tag{3.14}$$

odnosno

$$MTTF_S = R_S^*(0) \tag{3.15}$$

Primjer 3.1

Pouzdanost uređaja za strojno rezanje materijala određena je izrazom

$$R(t) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{t}{t_0}\right)^2, & 0 \le \mathrm{t} \prec \mathrm{t}_0 \\ 0, & \mathrm{t} \ge \mathrm{t}_0 \end{cases}$$

Treba odrediti učestalost kvara $\lambda(t)$ i srednje vrijeme do kvara uređaja *MTTF.*

Rješenje

Učestalost kvara određena je općim izrazom: $\lambda(t) = \dfrac{f(t)}{R(t)}$

Budući da je

$$f(t) = -\frac{dR(t)}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(1 - \frac{t}{t_0}\right)^2 = -2 \cdot \left(1 - \frac{t}{t_0}\right)\left(-\frac{1}{t_0}\right) = \frac{2}{t_0}\left(1 - \frac{t}{t_0}\right)$$

proizlazi da je

$$\lambda(t) = \frac{\dfrac{2}{t_0}\left(1 - \dfrac{t}{t_0}\right)}{\left(1 - \dfrac{t}{t_0}\right)^2} = \frac{2}{t\left(1 - \dfrac{t}{t_0}\right)}$$

Prema izrazu (3.11), srednje vrijeme do kvara uređaja određeno je izrazom

$$MTTF = \int_0^{t_0} \left(1 - \frac{t}{t_0}\right)^2 dt$$

Uz supstituciju $1 - \frac{t}{t_0} = u \Rightarrow -\frac{1}{t_0} dt = du$ i integriranjem pomoću Newton-Leibnizove formule dobiva se da je

$$MTTF = \frac{t_0}{3}$$

3.3 Osnovne značajke komponente s konstantnom učestalošću kvara

Za komponentu s konstantnom učestalošću kvara, odnosno komponentu za koju vrijedi

$$\lambda(t) = \lambda = konst.$$

proizlazi da za pouzdanost komponente $R(t)$ vrijedi

$$R(t) = e^{-\int_0^t \lambda(u) du} = e^{-\int_0^t \lambda du} = e^{-\lambda t}$$

Dakle, pouzdanost komponente s konstantnom učestalošću kvara λ određena je izrazom

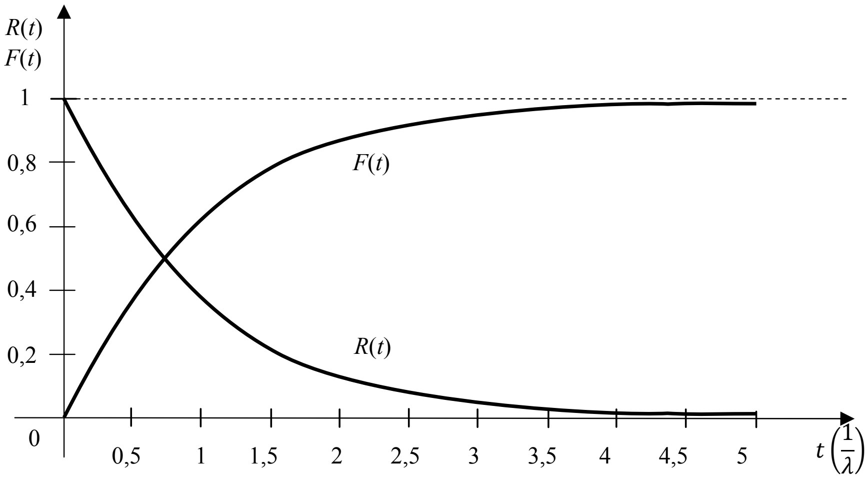
$$R(t) = e^{-\lambda t} \tag{3.16}$$

Razdioba vremena do kvara $F(t)$ komponente oblika je

$$F(t) = 1 - R(t) = 1 - e^{-\lambda t} \tag{3.17}$$

Ovaj izraz pokazuje da komponenta s konstantnom učestalošću kvara ima eksponencijalnu razdiobu vremena do kvara s parametrom jednakim toj učestalosti.

Vremenski dijagram pouzdanosti i razdiobe vremena do kvara komponente s konstantnom učestalošću kvara prikazan je na slici 3.2.

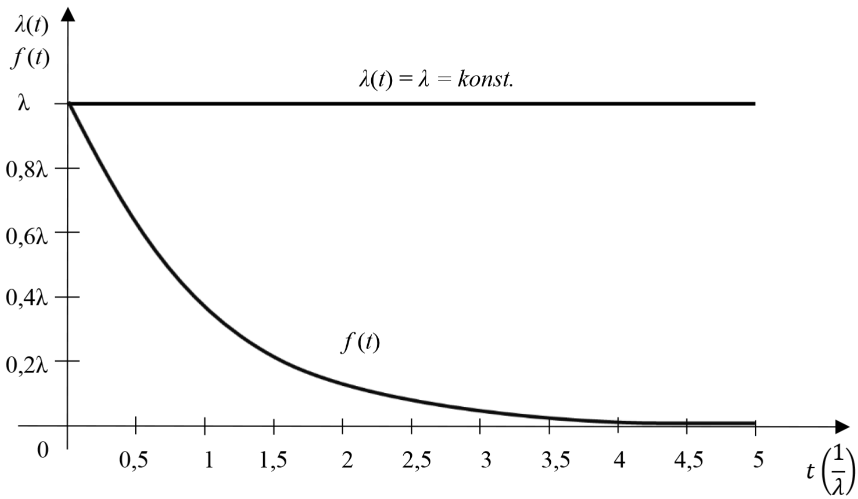


Slika 3.2. Vremenski dijagram pouzdanosti i razdiobe vremena do kvara komponente s konstantnom učestalošću kvara

Gustoća kvara $f(t)$ komponente određena je izrazom

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = \lambda e^{-\lambda t} \tag{3.18}$$

Vremenski dijagram učestalosti kvara i gustoće kvara komponente s konstantnom učestalošću kvara prikazan je na slici 3.3.



Slika 3.3. Vremenski dijagram učestalosti kvara i gustoće kvara komponente s konstantnom učestalošću kvara

Polazeći od općeg izraza (3.11), srednje vrijeme do kvara komponente $MTTF$ određeno je izrazom

$$MTTF = \int_0^\infty e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda} \tag{3.19}$$

Dakle, srednje vrijeme do kvara komponente s konstantnom učestalošću kvara jednako je recipročnoj vrijednosti te učestalosti.

Isti se rezultat dobije polazeći od izraza (3.13). Naime, Laplaceov transformat funkcije pouzdanosti određen je izrazom (3.16)

$$R^*(s) = \int_0^\infty R(t) e^{-st} dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{-st} dt = \int_0^\infty e^{-(s+\lambda)t} dt = \frac{1}{s+\lambda}$$

iz čega proizlazi da je

$$MTTF = R^*(0) = \frac{1}{\lambda}$$

***Primjer* 3.2**

Treba izračunati pouzdanost neobnovljive komponente za vrijeme od 6 mjeseci proteklo od trenutka njezinog uključenja u djelovanje ako je njezina učestalost kvara konstantna i iznosi 1 po godini njezinog djelovanja.

Rješenje

$$R(t) = e^{-\lambda t}$$

$$\lambda = \frac{1}{\mathrm{god}} = 1\mathrm{god}^{-1} \; ; \; t = \frac{6}{12}\mathrm{god} = 0{,}5\mathrm{god}$$

$$R(0{,}5) = e^{-1\times 0{,}5} = 0{,}60653$$

***Primjer* 3.3**

Treba izračunati srednje vrijeme do kvara neobnovljive komponente s konstantnom učestalošću kvara koja iznosi 2 kvara na 4 godine njezinog djelovanja.

Rješenje

$$MTTF = \frac{1}{\lambda}$$

$$\lambda = \frac{2}{4} = 0{,}5\mathrm{god}^{-1}$$

$$MTTF = \frac{1}{0{,}5} = 2\ \mathrm{god} = 17520\ \mathrm{h}$$

4. OBNOVA, VRIJEME DO OBNOVE I OBNOVLJIVOST KOMPONENTE

U ovom se poglavlju definira pojam obnove i vremena do obnove komponente kao i veličine, i njihovi međudnosi, relevantni za uspostavljanje i analizu prediktivnog matematičkog modela obnovljivosti i srednjeg vremena do obnove komponente.

4.1 Obnova i vrijeme do obnove komponente

Obnova i vrijeme do obnove komponente polazni su događaji, odnosno veličine kojima se u kvalitativnom i kvantitativnom smislu opisuju osnovna obilježja komponente tijekom njezinog obnavljanja.

4.1.1 Pojam obnove i vremena do obnove komponente

Obnova (engl. *repair*) **komponente** trenutačni je slučajni događaj koji se očituje povratom sposobnosti kvarne komponente za obavljanje definirane elementarne funkcije.

Vrijeme do obnove (engl. *time to repair, TTR*) **komponente**, označeno s T_R, vrijeme je koje proteče od trenutka $t = 0$, odnosno trenutka kad započinje obnavljanje kvarne komponente do trenutka nastupa njezine obnove. Budući da obnova komponente može nastupiti u bilo kojem trenutku, i to slučajno, vrijeme je do obnove komponente slučajna veličina sa značajkama nenegativne kontinuirane slučajne varijable.

4.1.2 Razdioba vremena do obnove komponente

Razdioba vremena do obnove (engl. *time to repair distribution*) **komponente** vremenski je ovisna veličina, označena s $G(t)$, definirana vjerojatnošću da je vrijeme do obnove komponente T_R manje ili najviše jednako vremenu t proteklom od trenutka $t = 0$, odnosno trenutka kad započinje obnavljanje kvarne komponente (Henley i Kumamoto, 1981). Dakle,

$$G(t) = P\{T_R \leq t\} \tag{4.1}$$

Osnovne su značajke $G(t)$:

(1) $0 \leq G(t) \leq 1$ za $t \geq 0$

(2) $G(0) = 0$; $\lim_{t\to\infty} G(t) = 1$

(3) $G(t)$ je neopadajuća s rastućim vremenom t

4.1.3 Gustoća obnove komponente

Gustoća obnove (engl. *repair density*) **komponente** vremenski je ovisna veličina, označena s $g(t)$, definirana graničnom vrijednošću omjera vjerojatnosti nastupa obnove komponente tijekom vremena Δt koje se nadovezuje na vrijeme t proteklo od trenutka $t = 0$, odnosno trenutka kad započinje obnavljanje kvarne komponente, i vremena Δt ako ono teži k nuli. Dakle,

$$g(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P\{t < T_R \leq t + \Delta t\}}{\Delta t} \tag{4.2}$$

Osnovne su značajke $g(t)$:

(1) $g(t) \geq 0$ za $t \geq 0$

(2) $\int_0^\infty g(t)dt = 1$

Iz definicijskog izraza za gustoću obnove komponente proizlazi da za neko malo Δt vrijedi

$$g(t)\Delta t \approx P\{t < T_R \leq t + \Delta t\}$$

što znači da $g(t)\Delta t$ predstavlja približnu vjerojatnost nastupa obnove komponente tijekom vremena Δt koje se nadovezuje na vrijeme t proteklo od trenutka $t = 0$, odnosno trenutka kad započinje obnavljanje kvarne komponente.

4.1.4 Međuodnos razdiobe vremena do obnove i gustoće obnove komponente

Između gustoće obnove i razdiobe vremena do obnove komponente postoji međuodnos analogan odnosu funkcije gustoće i funkcije razdiobe kontinuirane slučajne varijable. Naime, polazeći od definicijskog izraza za gustoću obnove komponente, dobiva se

$$g(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P\{t < T_R \le t + \Delta t\}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{G(t + \Delta t) - G(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta G(t)}{\Delta t}$$

iz čega proizlazi da je

$$g(t) = \frac{dG(t)}{dt} \tag{4.3}$$

odnosno inverzno

$$G(t) = \int_0^t g(u)\, du \tag{4.4}$$

4.1.5 Učestalost obnove komponente

Učestalost obnove (engl. *repair rate*) **komponente** vremenski je ovisna veličina, obično označena s $\mu(t)$, definirana graničnom vrijednošću omjera vjerojatnosti nastupa obnove komponente tijekom vremena Δt koje se nadovezuje na vrijeme t proteklo od trenutka $t = 0$, odnosno trenutka kad započinje obnavljanje kvarne komponente, i vremena Δt ako ono teži k nuli, pod uvjetom da tijekom čitavog vremena t komponenta još nije obnovljena (Henley i Kumamoto, 1981). Dakle,

$$\mu(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P\{t < T_R \le t + \Delta t | T_R > t\}}{\Delta t} \tag{4.5}$$

Iz ovog izraza proizlazi da za neko malo Δt vrijedi

$$\mu(t)\Delta t \approx P\{t < T_R \le t + \Delta t | T_R > t\}$$

što znači da $\mu(t)\Delta t$ predstavlja približnu vjerojatnost nastupa obnove komponente tijekom vremena Δt koje se nadovezuje na vrijeme t proteklo od trenutka $t = 0$, odnosno trenutka kad započinje obnavljanje kvarne komponente, pod uvjetom da tijekom čitavog vremena t komponenta još nije obnovljena.

4.1.6 Međuodnos učestalosti obnove i gustoće obnove komponente

Za određivanje međuodnosa učestalosti obnove i gustoće obnove polazi se od definicijskog izraza za učestalost obnove. Uzimajući u obzir pravilo za uvjetnu vjerojatnost te definicijske izraze za gustoću obnove komponente i razdiobu vremena do obnove komponente kao i njihov međuodnos dobiva se da je

$$\mu(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{P\{t<T_R\le t+\Delta t|T_R>t\}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\frac{P\{t<T_R\le t+\Delta t\}}{P\{T_R>t\}}=$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\frac{P\{t<T_R\le t+\Delta t\}}{1-P\{T_R\le t\}}$$

iz čega proizlazi da je

$$\mu(t)=\frac{g(t)}{1-G(t)}=\frac{g(t)}{1-\int\limits_0^t g(u)\,du} \tag{4.6}$$

Budući da je $0\le\int_0^t g(u)du<1$ za svako $0\le t<\infty$, učestalost je obnove komponente uvijek veća od gustoće obnove komponente, osim u trenutku $t=0$, kad su ove veličine međusobno jednake.

4.1.7 Srednje vrijeme do obnove komponente

Polazeći od općeg pravila za određivanje srednje vrijednosti kontinuirane slučajne varijable, **srednje vrijeme do obnove** (engl. *mean time to repair, MTTR*) **komponente** određeno je matematičkim očekivanjem vremena do obnove komponente, označenim s $E[T_R]$, definiranim s

$$MTTR=E[T_R]=\int\limits_0^\infty tg(t)dt \tag{4.7}$$

4.2 Obnovljivost komponente

Obnovljivost komponente temeljna je veličina kojom se u kvalitativnom i kvantitativnom smislu opisuje sposobnost komponente (i primijenjene logističke podrške) da se obnavljanje komponente obavi tijekom promatranog razdoblja.

4.2.1 Pojam i osnovne značajke obnovljivosti komponente

Obnovljivost (engl. *repairability*) **komponente** u kvantitativnom je smislu vremenski ovisna veličina, označena s $M(t)$, definirana vjerojatnošću da je vrijeme do obnove komponente najviše jednako proizvoljno odabranom vremenu t proteklom od trenutka $t = 0$, odnosno trenutka kad započinje obnavljanje kvarne komponente (Villemeur, 1992). Dakle,

$$M(t) = P\{T_R \leq t\} \tag{4.8}$$

Osnovne su značajke $M(t)$:

(1) $0 \leq M(t) \leq 1$ za $t \geq 0$

(2) $M(0) = 0$; $\lim_{t \to \infty} M(t) = 1$

(3) $M(t)$ je neopadajuća s rastućim vremenom *t*

Definicijski izraz za obnovljivost komponente i njezine osnovne značajke pokazuju da je obnovljivost komponente, kao vremenski ovisna funkcija, identična funkciji razdiobe vremena do obnove komponente. Dakle,

$$M(t) \equiv G(t) \tag{4.9}$$

4.2.2 Međuodnos obnovljivosti i učestalosti obnove komponente

Polazeći od (4.6) i (4.9), proizlazi da je

$$\mu(t) = \frac{\frac{dM(t)}{dt}}{1 - M(t)} = \frac{-\frac{d}{dt}\left[1 - M(t)\right]}{1 - M(t)}$$

odnosno

$$\frac{d\left[1 - M(t)\right]}{1 - M(t)} = -\mu(t)dt$$

Integrirajući lijevu i desnu stranu, uz uzimanje u obzir da je $M(0) = 0$, dobiva se da je

$$ln\left[1 - M(t)\right] = -\int_0^t \mu(u)du$$

odnosno konačno

$$M(t) = 1 - e^{-\int_0^t \mu(u)du} \tag{4.10}$$

Ovim je izrazom iskazan međuodnos obnovljivosti i učestalosti obnove komponente.

4.2.3 *Međuodnos srednjeg vremena do obnove i obnovljivosti komponente*

Polazeći od (4.7), dobiva se da je

$$MTTR = \int_0^\infty t\left[-\frac{d[1-M(t)]}{dt}\right]dt = -\int_0^\infty t d[1-M(t)]$$

Uvođenjem supstitucija $t = u$ i $d[1-M(t)] = dv$ i primjenom pravila za parcijalnu integraciju dobiva se

$$MTTR = \int_0^\infty [1-M(t)]dt - \{t[1-M(t)]\}_0^\infty$$

Uvažavajući činjenicu da je

$$\lim_{t\to\infty} t[1-M(t)] = 0$$

proizlazi da je

$$MTTR = \int_0^\infty [1-M(t)]dt \qquad (4.11)$$

Ovaj izraz omogućava određivanje srednjeg vremena do obnove komponente pomoću poznate obnovljivosti komponente.

4.3 Osnovne značajke komponente s konstantnom učestalošću obnove

Za komponentu s konstantnom učestalošću obnove, odnosno komponentu za koju vrijedi

$$\mu(t) = \mu = konst.$$

proizlazi da za obnovljivost komponente $M(t)$ vrijedi

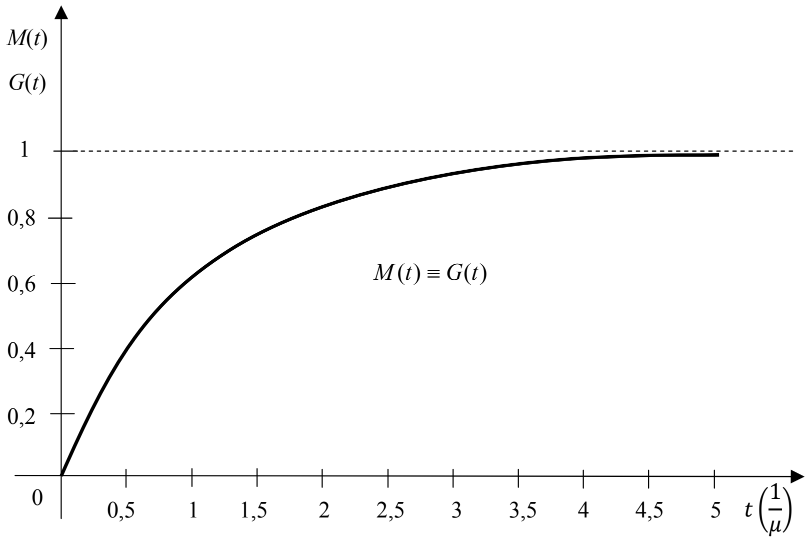
$$M(t) = 1 - e^{-\int_0^t \mu(u)du} = 1 - e^{-\int_0^t \mu du} = 1 - e^{-\mu t}$$

Dakle, obnovljivost komponente s konstantnom učestalošću obnove μ određena je izrazom

$$M(t) = 1 - e^{-\mu t} \qquad (4.12)$$

što je ujedno i razdioba vremena do obnove $G(t)$. Ovaj izraz pokazuje da komponenta s konstantnom učestalošću obnove ima eksponencijalnu razdiobu vremena do obnove s parametrom jedakim toj učestalosti.

Vremenski dijagram funkcije obnovljivosti, odnosno razdiobe vremena do obnove komponente s konstantnom učestalošću obnove, prikazan je na slici 4.1.

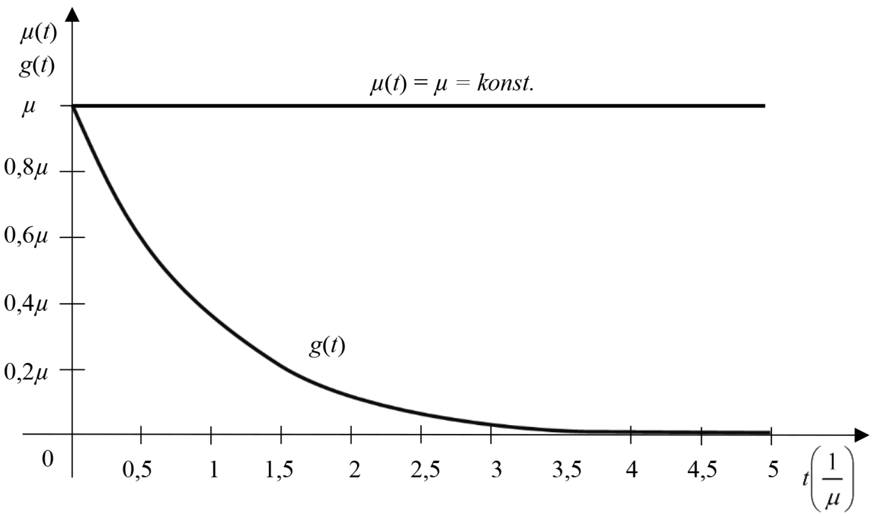


Slika 4.1. Vremenski dijagram obnovljivosti (razdiobe vremena do obnove) komponente s konstantnom učestalošću obnove

Gustoća obnove $g(t)$ komponente s konstantnom učestalošću kvara određena je izrazom

$$g(t) = \frac{dM(t)}{dt} = \mu e^{-\mu t} \tag{4.13}$$

Vremenski dijagram učestalosti obnove i gustoće obnove komponente s konstantnom učestalošću obnove prikazan je na slici 4. 2.



Slika 4.2. Vremenski dijagram učestalosti obnove i gustoće obnove komponente s konstantnom učestalošću obnove

Polazeći od općeg izraza za njegovo određivanje, srednje vrijeme do obnove $MTTR$ komponente jest

$$MTTR = \int_0^\infty [1 - M(t)]dt = \int_0^\infty \left[1 - \left(1 - e^{-\mu t}\right)\right]dt = \frac{1}{\mu}$$

Dakle,

$$MTTR = \frac{1}{\mu} \tag{4.14}$$

Prema tome, srednje vrijeme do obnove komponente s konstantnom učestalošću obnove jednako je recipročnoj vrijednosti te učestalosti.

5. POUZDANOST NEOBNOVLJIVIH SUSTAVA

U ovom se poglavlju preciznije definira pojam pouzdanosti višekomponentnih neobnovljivih sustava i predstavlja pristup uspostavljanju prediktivnog matematičkog modela pouzdanosti neobnovljivih sustava s međusobno neovisnim komponentama, koristeći blok dijagram pouzdanosti, kao i pristup uspostavljanju Markovljevog modela pouzdanosti neobnovljivih sustava s međusobno ovisnim komponentama. Također se određuju i izrazi za srednje vrijeme do kvara promatranih sustava.

5.1 Pojam pouzdanosti sustava

Analogno pouzdanosti komponente, **pouzdanost sustava** veličina je iskazana funkcijom $R_S(t)$ definirana vjerojatnošću da je vrijeme do kvara sustava veće od proizvoljno odabranog vremena t proteklog od trenutka $t=0$, kad sustav započinje s djelovanjem, uz uvjet da su u tom trenutku sve njegove komponente ispravne, odnosno imaju sposobnost obavljanja definirane elementarne funkcije (Villemeur, 1992). Funkcija $R_S(t)$ zapravo je **matematički model pouzdanosti sustava.** Uspostavljanje modela pouzdanosti nekog složenijeg sustava temelji se na poznavanju pouzdanosti komponenata sustava i strukture sustava.

Pri modeliranju pouzdanosti sustava pretpostavit će se da se komponente sustava nalaze u razdoblju „normalnog“ radnog vijeka, kad imaju konstatnu učestalost kvara, odnosno eksponencijalnu razdiobu vremena do kvara. Nadalje, kod zalihosnih sustava prešutno se pretpostavlja da se komponente u trenutku nastupa kvara trenutačno uklanjaju iz sustava kako ne bi ometale rad zalihosnih komponenata, koje preuzimaju funkciju kvarnih komponenata.

5.2 Pouzdanost sustava s međusobno neovisnim komponentama

Sustavi s međusobno neovisnim komponentama sustavi su kod kojih promjena učestalosti kvara bilo koje od komponenenata ne uzrokuje promjenu učestalosti kvara bilo koje druge komponente tog sustava.

Pri određivanju pouzdanosti neobnovljivog sustava s međusobno neovisnim komponentama, kao prikladno pomoćno sredstvo konstruira se **blok**

dijagram pouzdanosti (engl. *reliability block diagram, RBD*) **sustava**. *RBD* sustava sastoji se od **skupa orijentiranih grana**, pri čemu svaka grana sadrži samo jednu komponentu tog sustava.

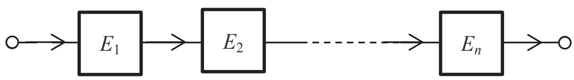
Skup međusobno serijski povezanih orijentiranih grana *RBD* sustava, od ulaza do izlaza sustava, čini **orijentiranu stazu sustava**.

Čvorište *RBD* sustava čini mjesto u kojem su međusobno povezane najmanje dvije grane *RBD* sustava.

5.2.1 Sustav serijske strukture

Sustav serijske strukture višekomponentni je sustav čije je radno stanje uvjetovano radnim stanjem svih njegovih komponenata (Lewis, 1987). Pouzdanost sustava takve strukture svojstvena je nezalihosnim sustavima jer je za kvar takvog sustava dovoljan kvar samo jedne (bilo koje) njegove komponente.

Neka se, primjerice, pretpostavi n-komponentni sustav serijske strukture. *RBD* takvog sustava prikazan je na slici 5.1.



Slika 5.1. *RBD n*-komponentnog sustava serijske strukture

Za određivanje pouzdanosti sustava, neka se s e_i označi događaj da se komponenta E_i stalno nalazi u radnom stanju u razdoblju $(0,t]$. Vjerojatnost tog događaja zapravo predstavlja zapravo pouzdanost $R_i(t)$ komponente E_i, odnosno

$$P\{e_i\} = P\{T_{F_i} > t\} = R_i(t) \tag{5.1}$$

Sustav je stalno u radnom stanju u razdoblju $(0,t]$ samo kad se sve komponente sustava u tom razdoblju stalno nalaze u radnom stanju. Prema tome, pouzdanost sustava određena je vjerojatnošću presjeka događaja $e_1,.....,e_n$, odnosno

$$R_S(t) = P\{e_1 \cap ..... \cap e_n\} \tag{5.2}$$

Zbog pretpostavke o međusobnoj neovisnosti komponenata $E_1,.....,E_n$, a time i događaja $e_1,.....,e_n$, slijedi da je

$$R_S(t) = P\{e_1\} \cdot ..... \cdot P\{e_n\} \tag{5.3}$$

odnosno

$$R_S(t) = R_1(t) \cdot ..... \cdot R_n(t) \tag{5.4}$$

ili skraćeno

$$R_S(t) = \prod_{i=1}^{n} R_i(t) \tag{5.5}$$

Uz pretpostavku da sve komponente imaju konstantnu učestalost kvara, zbog čega je

$$R_i(t) = e^{-\lambda_i t} \quad \text{za svako } i = 1,2,.....,n \tag{5.6}$$

iz izraza (5.5) proizlazi da je

$$R_S(t) = e^{-\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right) t} \tag{5.7}$$

U ovom izrazu zbroj učestalosti kvarova komponenata zapravo predstavlja učestalost kvara sustava, označenu s λ_S. Dakle,

$$\lambda_S = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \tag{5.8}$$

Dakle, učestalost kvara sustava serijske strukture s međusobno neovisnim komponenatama jednaka je zbroju učestalosti kvara svih komponenata tog sustava.

Primjer 5.1

Sustav je sastavljen od dvije neovisne komponente povezane u serijsku konfiguraciju. Učestalost kvara prve komponente je $0{,}002\ \mathrm{h}^{-1}$, a druge komponente $0{,}004\ \mathrm{h}^{-1}$. Treba izračunati pouzdanost sustava za 50 sati rada.

Rješenje

$\lambda_1 = 0{,}002\ \mathrm{h}^{-1}$

$\lambda_2 = 0{,}004\ \mathrm{h}^{-1}$

Prema izrazu (5.7), za $n = 2$ dobiva se:

$$R_s(t) = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)\cdot t} = e^{-(0{,}002+0{,}004)50} = 0{,}74082$$

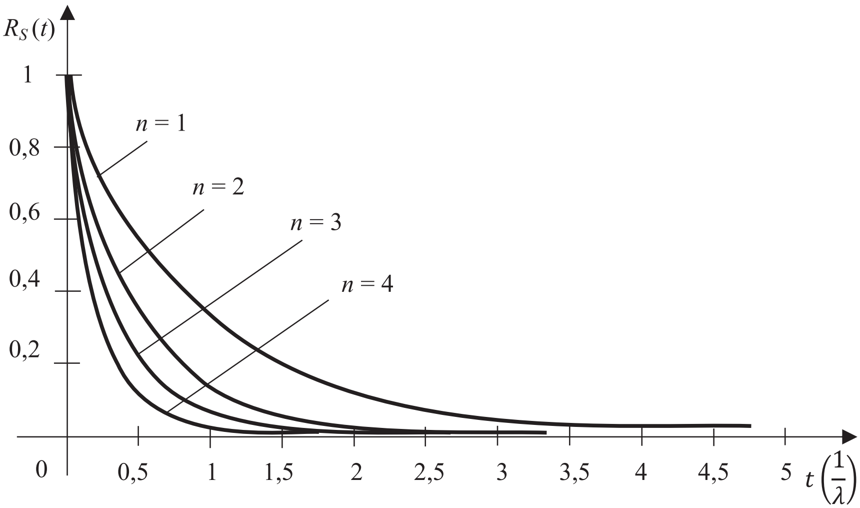
Polazeći od općeg izraza (3.14), srednje vrijeme do kvara takvog sustava, označeno s $MTTF_S$, određeno je izrazom

$$MTTF_S = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i} \tag{5.9}$$

Neka se sad, u ilustrativne svrhe, pretpostavi n-komponentni sustav čije komponente imaju konstantne i jednake učestalosti kvara λ. Polazeći od izraza (5.7), izraz za pouzdanost takvog sustava oblika je

$$R_S(t) = e^{-n\lambda t} \tag{5.10}$$

Dijagram pouzdanosti takvog sustava s brojem komponenata n kao parametrom prikazan je na slici 5.2.

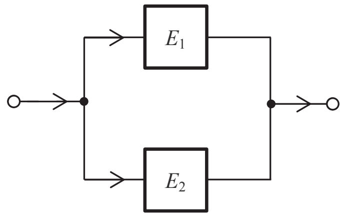


Slika 5.2. Dijagrami pouzdanosti sustava serijske strukture s komponentama konstantne i jednake učestalosti kvara

5.2.2 Sustav paralelne strukture

Sustav paralelne strukture višekomponentni je sustav za čije je radno stanje dovoljno radno stanje samo jedne (bilo koje) njegove komponente (Lewis, 1987). Stoga, takav je sustav u kvarnom stanju samo kad se sve njegove komponente nalaze u kvarnom stanju. Pouzdanost sustava takve strukture svojstvena je zalihosnim sustavima.

Neka se najprije razmatra dvokomponentni sustav paralelne strukture s komponentama E_1 i E_2. *RBD* takvog sustava prikazan je na slici 5.3.



Slika 5.3. *RBD* dvokomponentnog sustava paralelne strukture

Da bi se sustav stalno nalazio u radnom stanju u razdoblju $(0,t]$ dovoljno je da se barem jedna od dviju komponenata sustava stalno nalazi u radnom stanju u tom razdoblju. Drugim riječima, pouzdanost sustava određena je vjerojatnošću unije događaja e_1 i e_2 . Dakle,

$$R_S(t) = P\{e_1 \cup e_2\} = P\{e_1\} + P\{e_2\} - P\{e_1 \cap e_2\} \tag{5.11}$$

Polazeći od pretpostavke da su komponente međusobno neovisne, proizlazi da je

$$R_S(t) = P\{e_1\} + P\{e_2\} - P\{e_1\} \cdot P\{e_2\} \tag{5.12}$$

odnosno

$$R_S(t) = R_1(t) + R_2(t) - R_1(t)R_2(t) \tag{5.13}$$

Ako su poznate konstantne učestalosti kvara komponenata, odnosno λ_1 i λ_2, pouzdanost je promatranog sustava određena izrazom

$$R_S(t) = e^{-\lambda_1 t} + e^{-\lambda_2 t} - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} \tag{5.14}$$

Polazeći od općeg izraza (3.14), srednje vrijeme do kvara sustava određeno je izrazom

$$MTTF_S = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} \tag{5.15}$$

Budući da u promatranom sustavu obje komponente istovremeno obavljaju zahtijevanu integralnu funkciju sustava, razumno je pretpostaviti jednakost pouzdanosti ovih komponenata, odnosno $R_1(t) = R_2(t) = R(t)$. Tada izraz (5.13) poprima oblik

$$R_S(t) = 2R(t) - R^2(t) \tag{5.16}$$

Ako pritom obje komponente imaju konstantne i jednake učestalosti kvara λ, pouzdanost sustava određena je izrazom

$$R_S(t) = 2e^{-\lambda t} - e^{-2\lambda t} \tag{5.17}$$

Polazeći od općeg izraza (3.14), srednje vrijeme do kvara sustava određeno je izrazom

$$MTTF_S = \frac{2}{\lambda} - \frac{1}{2\lambda} = \frac{3}{2}\frac{1}{\lambda} = \frac{3}{2} MTTF \tag{5.18}$$

pri čemu je $MTTF$ srednje vrijeme do kvara svake komponente sustava.

Primjer 5.2

Sustav je sastavljen od dvije neovisne komponente povezane u paralelnu konfiguraciju. Učestalosti kvara komponenata jednake su i iznose $0{,}002\ \mathrm{h}^{-1}$. Treba izračunati pouzdanost sustava za 60 sati rada i srednje vrijeme do kvara sustava.

Rješenje

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = 0{,}002\ \mathrm{h}^{-1}$

$t = 60\ \mathrm{h}$

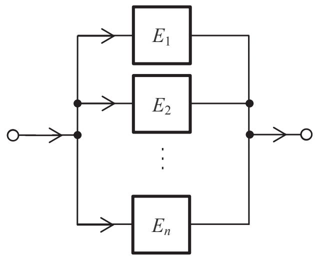
Prema izrazu (5.17.), može se izračunati

$$R_S(t) = 2e^{-0{,}002\cdot 60} - e^{-2\cdot 0{,}002\cdot 60} = 0{,}98717$$

Primjenom izraza (5.18.), srednje vrijeme do kvara sustava iznosi

$$MTTF = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{0{,}002}\ \mathrm{h} = 750\ \mathrm{h}$$

Neka se sad pretpostavi n-komponentni sustav paralelne strukture. *RBD* takvog sustava prikazan je na slici 5.4.



Slika 5.4. *RBD* n-komponentnog sustava paralelne strukture

Promatrani sustav posjeduje n staza, a isto toliko i grana odnosno komponenata. Sve komponente istovremeno obavljaju zahtijevanu integralnu funkciju sustava. Zbog toga je dovoljno da samo jedna, bilo koja, od komponenta obavlja svoju funkciju pa da sustav obavlja zahtijevanu funkciju. Polazeći od ove činjenice, pouzdanost sustava $R_S(t)$, koja je definirana vjerojatnošću da će sustav stalno obavljati zahtijevanu funkciju tijekom razdoblja $(0,t]$, određena je vjerojatnošću unije događaja $e_1, e_2,....., e_n$ koji predstavljaju radno stanje svake od komponenata $E_1, E_2,....., E_n$. Dakle,

$$R_S(t) = P\{e_1 \cup e_2 \cup ..... \cup e_n\} \tag{5.19}$$

Pri određivanju izraza za pouzdanost takvog sustava polazi se od izraza za njegovu **nepouzdanost** označenogu s $Q_S(t)$, koji predstavlja komplement izraza za pouzdanost, odnosno

$$Q_S(t) = 1 - R_S(t) \tag{5.20}$$

Polazeći od toga, nepouzdanost sustava $Q_S(t)$ definirana je vjerojatnošću da je sustav stalno u kvarnom stanju tijekom razdoblja (0,t]. To je moguće samo ako se u tom razdoblju sve komponente sustava stalno nalaze u kvarnom stanju. Ako se s $Q_i(t)$ označi događaj u kojem se u razdoblju (0,t] komponenta E_i stalno nalazi u kvarnom stanju, odnosno stanju $\overline{e}_i$, $Q_S(t)$ jednaka je vjerojatnosti presjeka događaja $\overline{e}_1, \overline{e}_2,....., \overline{e}_n$. Dakle,

$$Q_S(t) = P\{\overline{e}_1 \cap \overline{e}_2 \cap ..... \cap \overline{e}_n\} \tag{5.21}$$

Budući da su komponente međusobno neovisne, vjerojatnost presjeka događaja $\overline{e}_1, \overline{e}_2,....., \overline{e}_n$ jednaka je umnošku vjerojatnosti svih ovih događaja. Dakle,

$$Q_S(t) = P\{\overline{e}_1\} \cdot P\{\overline{e}_2\} \cdot \cdots P\{\overline{e}_n\} \tag{5.22}$$

Budući da su komponente s funkcijskog stanovišta binarne, odnosno mogu se nalaziti u radnom ili u kvarnom stanju, vjerojatnost je kvarnog stanja svake komponente komplementarna vjerojatnosti njezinog radnog stanja. Stoga je

$$Q_S(t) = [1 - P\{e_1\}][1 - P\{e_2\}] \cdot \cdots \cdot [1 - P\{e_n\}] \tag{5.23}$$

Budući da vjerojatnost radnog stanja svake komponente tijekom čitavog razdoblja $(0,t]$ zapravo predstavlja njezinu pouzdanost, gornji izraz prelazi u oblik

$$Q_S(t) = [1 - R_1(t)][1 - R_2(t)] \cdot \cdots \cdot [1 - R_n(t)] \tag{5.24}$$

Ako se to uzme u obzir, iz izraza (5.20) proizlazi da je pouzdanost promatranog sustava, izražena pomoću pouzdanosti njegovih komponenata, određena izrazom

$$R_S(t) = 1 - \ [1 - R_1(t)][1 - R_2(t)] \cdot \cdots \cdot [1 - R_n(t)] \tag{5.25}$$

odnosno, pisano kraće

$$R_S(t) = 1 - \prod_{i=1}^{n} [1 - R_i(t)] \tag{5.26}$$

Uz pretpostavku da sve komponente imaju konstantnu učestalost kvara, zbog čega je

$$R_i(t) = e^{-\lambda_i t} \ \text{za svako} \ i = 1,2,....., n$$

izraz (5.26) prelazi u oblik

$$R_S(t) = 1 - \prod_{i=1}^{n} \left(1 - e^{-\lambda_i t}\right) \tag{5.27}$$

Pretpostavi li se da su sve komponente jednake pouzdanosti, odnosno ako je $R_i(t) = R(t)$ za svako $i = 1,2,....., n$, izraz (5.26) prelazi u oblik

$$R_S(t) = 1 - [1 - R(t)]^n \tag{5.28}$$

Ako se još pretpostavi da su sve komponente konstantne i jednake učestalosti kvara λ , tada izraz (5.27) prelazi u oblik

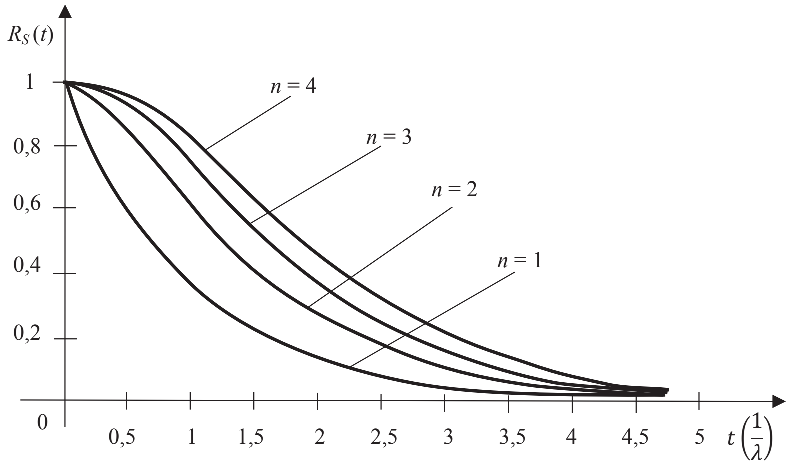
$$R_S(t) = 1 - \left(1 - e^{-\lambda t}\right)^n \tag{5.29}$$

a polazeći od općeg izraza (3.14), srednje vrijeme do kvara sustava određeno je izrazom

$$MTTF_S = \left(1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}\right)\frac{1}{\lambda} = \left(1 + \frac{1}{2} + \cdot \cdots \cdot + \frac{1}{n}\right) MTTF \tag{5.30}$$

pri čemu je $MTTF$ srednje vrijeme do kvara svake komponente promatranog sustava.

Na slici 5.5. prikazani su dijagrami pouzdanosti četverokomponentnog sustava paralelne strukture s komponentama konstantne i jednake učestalosti kvara.



Slika 5.5. Dijagrami pouzdanosti sustava paralelne strukture s komponentama konstantne i jednake učestalosti kvara

5.2.3 Sustav k-od-n strukture

Višekomponentni je sustav ***k-od-n*** **strukture** ako se sastoji od n identičnih neovisnih komponenata pri čemu je dovoljno da se barem njih k $(k \leq n)$ nalazi u radnom stanju pa da se i sustav nalazi u radnom stanju (Birolini, 1999). Stoga, ako je dovoljno da se barem k od ukupno n komponenata sustava nalazi u radnom stanju tijekom čitavog razdoblja $(0,t]$ pa da i sustav bude u tom razdoblju u radnom stanju, sustav će biti u tom stanju ako se u tom razdoblju u radnom stanju nalazi k ili k+1 ili k+2 ili ..... ili n-1 ili n komponenata. Vjerojatnost tog događaja, koja zapravo predstavlja pouzdanost sustava $R_S(t)$, jednaka je zbroju vjerojatnosti da se k, $k+1$, ... , $n-1$, n komponenata nalazi u radnom stanju. Budući da je vjerojatnost da se od n identičnih komponenata k komponenata nalazi u radnom stanju jednaka

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

pri čemu je

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

a p predstavlja vjerojatnost neprekidnog radnog stanja svake komponente sustava u razdoblju $(0, t]$, što je zapravo pouzdanost $R(t)$ svake komponente, pouzdanost sustava određena je izrazom

$$R_S(t) = \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} R(t)^j \left[1 - R(t)\right]^{n-j} \tag{5.31}$$

U ovom se izrazu $R_S(t)$ može interpretirati kao vjerojatnost nastupa najmanje *k* povoljnih ishoda s vjerojatnošću $p = R(t)$ u n Bernoulijevih pokušaja. Uz pretpostavku da sve komponente imaju konstantnu i jednaku učestalost kvara λ, pouzdanost sustava određena je izrazom

$$R_S(t) = \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} e^{-j\lambda t} (1 - e^{-\lambda t})^{n-j} \tag{5.32}$$

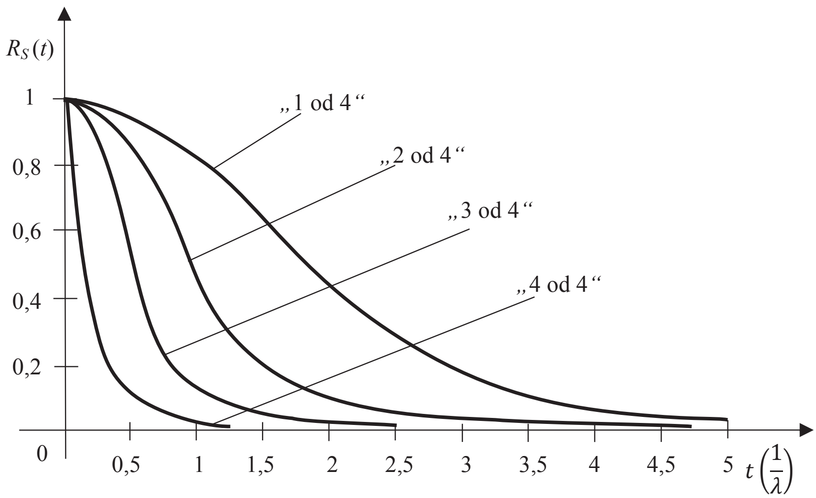
Neka se, primjerice, razmatra sustav 2-*od*-4 strukture*,* odnosno sustav koji tvore četiri identične neovisne komponente s konstantnom učestalošću kvara λ , pri čemu najmanje dvije komponente, bilo koje, moraju biti u radnom stanju tijekom čitavog razdoblja $(0,t\,]$ da bi sustav u tom razdoblju bio stalno u radnom stanju. Vjerojatnost tog događaja, koja zapravo predstavlja pouzdanost tog sustava, određena je izrazom

$$\begin{aligned} R_S(t) &= \sum_{j=2}^{4} \binom{4}{j} e^{-j\lambda t} \left(1 - e^{-\lambda t}\right)^{4-j} = \\ &= \binom{4}{2} e^{-2\lambda t} \left(1 - e^{-\lambda t}\right)^{4-2} + \binom{4}{3} e^{-3\lambda t} \left(1 - e^{-\lambda t}\right)^{4-3} + \\ &+ \binom{4}{4} e^{-4\lambda t} \left(1 - e^{-\lambda t}\right)^{4-4} \end{aligned} \tag{5.33}$$

odnosno nakon algebarskog uređenja

$$R_S(t) = 6e^{-2\lambda t} - 8e^{-3\lambda t} + 3e^{-4\lambda t} \tag{5.34}$$

Na slici 5.6. prikazani su vremenski dijagrami pouzdanosti sustava k-*od*-4 strukture, za $k = 1, 2, 3, 4,$ s komponentama konstantne i jednake učestalosti kvara.



Slika 5.6. Vremenski dijagrami pouzdanosti sustava *k*-*od*-4 strukture s komponentama konstantne i jednake učestalosti kvara

Iz dijagrama prikazanih na slici 5.6 vidljivo je, a što se može i analitički dokazati, da je pouzdanost sustava 4-*od*-4 strukture jednaka pouzdanosti sustava serijske strukture sa 4 komponente, a pouzdanost sustava 1-*od*-4 strukture jednaka pouzdanosti sustava paralelne strukture s 4 komponente konstantnih i jednakih učestalosti kvara.

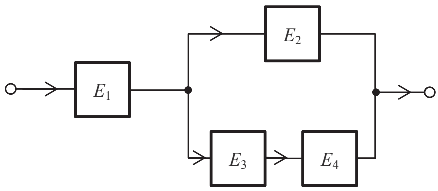
Polazeći od općeg izraza (3.14), srednje vrijeme do kvara takvog sustava određeno je izrazom

$$MTTF_S = \frac{6}{2\lambda} - \frac{8}{3\lambda} + \frac{3}{4\lambda} = \frac{13}{12}\frac{1}{\lambda} = \frac{13}{12}MTTF \tag{5.35}$$

pri čemu je $MTTF$ srednje vrijeme do kvara svake komponente promatranog sustava.

5.2.4 Sustav serijsko-paralelne strukture

Pouzdanost sustava **serijsko-paralelne strukture** može se odrediti postupnim uporabom pristupa za određivanje pouzdanosti sustava serijske i paralelne strukture (Lewis, 1987). Za ilustraciju tog pristupa neka se odredi pouzdanost četverokomponentnog sustava serijsko-paralelne strukture čiji je *RBD* prikazan na slici 5.7.



Slika 5.7. Primjer *RBD* četverokomponentnog sustava serijsko/paralelne strukture

Ako se s e_1, e_2, e_3 i e_4 označe događaji da će odnosne neovisne komponente E_1, E_2, E_3 i E_4 biti u radnom stanju tijekom čitavog razdoblja $(0,t]$, polazni je izraz za određivanje pouzdanosti sustava $R_S(t)$ oblika

$$R_S(t) = P\{e_1 \cap [e_2 \cup (e_3 \cap e_4)]\} \tag{5.36}$$

Pretpostavljajući da su događaji e_1, e_2, e_3 i e_4 međusobno neovisni, prethodni izraz poprima oblik

$$\begin{aligned} R_S(t) &= P\{e_1\} \cdot P\{e_2 \cup (e_3 \cap e_4)\} = P\{e_1\} \cdot [P\{e_2\} + P\{e_3 \cap e_4\} - P\{e_2\} \cdot P\{e_3 \cap e_4\}] = \\ &= P\{e_1\} \cdot [P\{e_2\} + P\{e_3\} \cdot P\{e_4\} - P\{e_2\} \cdot P\{e_3\} \cdot P\{e_4\}] = \\ &= P\{e_1\} \cdot P\{e_2\} + P\{e_1\} \cdot P\{e_3\} \cdot P\{e_4\} - P\{e_1\} \cdot P\{e_2\} \cdot P\{e_3\} \cdot P\{e_4\} \end{aligned} \tag{5.37}$$

Budući da je $P\{e_i\} = R_i(t)$ za svako $i = 1, 2, 3, 4$, odnosno budući da je vjerojatnost da je i-ta komponenta u radnom stanju tijekom čitavog razdoblja $(0, t]$ zapravo pouzdanost te komponente $R_i(t)$, iz prethodnog izraza proizlazi da je

$$R_S(t) = R_1(t)R_2(t) + R_1(t)R_3(t)R_4(t) - R_1(t)R_2(t)R_3(t)R_4(t) \tag{5.38}$$

Imaju li komponente E_1, E_2, E_3, E_4 konstantne učestalosti kvara, redom $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$, a pouzdanost i-te komponente sustava određena je izrazom

$R_i(t) = e^{-\lambda_i t}$, pouzdanost sustava određena je izrazom

$$R_S(t) = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t} + e^{-(\lambda_1+\lambda_3+\lambda_4)t} - e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4)t} \tag{5.39}$$

Polazeći od općeg izraza (3.14), srednje vrijeme do kvara sustava $MTTF_S$ određeno je izrazom

$$MTTF_S = \frac{1}{\lambda_1+\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_1+\lambda_3+\lambda_4} - \frac{1}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4} \tag{5.40}$$

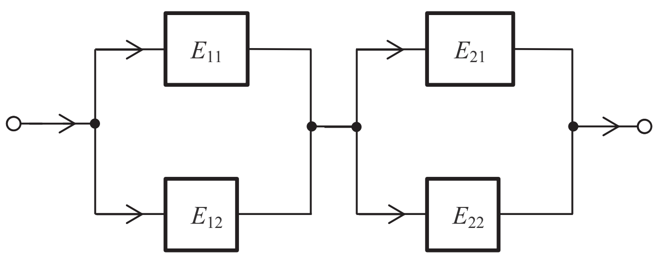
5.2.5 Sustavi sa zalihošću

Postoje dvije karakteristične strukture zalihosnih sustava: jednu karakterizira zalihost na razini svake komponente, a drugu zalihost na razini cjelokupnog sustava.

5.2.5.1 Sustav sa zalihošću niske razine

Sustav sa zalihošću niske razine sustav je takve strukture kod koje je zalihost izvedena na razini svake komponente sustava**.**

Neka se pretpostavi dvokomponentni sustav serijske strukture, pri čemu se svaka komponenta nalazi u paralelnoj vezi s jednom zalihosnom komponentom. Za tako strukturiran sustav obično se kaže da je to dvokomponentni sustav s jednostrukom zalihošću niske razine (Birolini, 1999). *RBD* sustava takve strukture prikazan je na slici 5.8.



Slika 5.8. *RBD* dvokomponentnog sustava s jednostrukom zalihošću niske razine

Polazeći od danih pretpostavki, pouzdanost promatranog sustava određena je općim izrazom

$$\begin{aligned}
&R_S(t) = P\{(e_{11} \cup e_{12}) \cap (e_{21} \cup e_{22})\} = P\{e_{11} \cup e_{12}\} \cdot P\{e_{21} \cup e_{22}\} = \\
&= [P\{e_{11}\} + P\{e_{12}\} - P\{e_{11} \cap e_{12}\}] \cdot [P\{e_{21}\} + P\{e_{22}\} - P\{e_{21} \cap e_{22}\}] = \\
&= [P\{e_{11}\} + P\{e_{12}\} - P\{e_{11}\} \cdot P\{e_{12}\}] \cdot [P\{e_{21}\} + P\{e_{22}\} - P\{e_{21}\} \cdot P\{e_{22}\}] = \\
&= P\{e_{11}\} \cdot P\{e_{21}\} + P\{e_{12}\} \cdot P\{e_{21}\} - P\{e_{11}\} \cdot P\{e_{12}\} \cdot P\{e_{21}\} + P\{e_{11}\} \cdot P\{e_{22}\} + \\
&P\{e_{12}\} \cdot P\{e_{22}\} - P\{e_{11}\} \cdot P\{e_{12}\} \cdot P\{e_{22}\} - P\{e_{11}\} \cdot P\{e_{21}\} \cdot P\{e_{22}\} - \\
&P\{e_{12}\} \cdot P\{e_{21}\} \cdot P\{e_{22}\} + P\{e_{11}\} \cdot P\{e_{12}\} \cdot P\{e_{21}\} \cdot P\{e_{22}\}
\end{aligned} \tag{5.41}$$

uvrštenjem $P\{e_{11}\} = R_{11}(t)$, $P\{e_{12}\} = R_{12}(t)$, $P\{e_{21}\} = R_{21}(t)$ i $P\{e_{22}\} = R_{22}(t)$

dobiva se

$$\begin{aligned}
&R_S(t) = R_{11}(t)R_{21}(t) + R_{12}(t)R_{21}(t) + R_{11}(t)R_{22}(t) + R_{12}(t)R_{22}(t) - \\
&- R_{11}(t)R_{12}(t)R_{21}(t) - R_{11}(t)R_{12}(t)R_{22}(t) - R_{11}(t)R_{21}(t)R_{22}(t) - \\
&- R_{12}(t)R_{21}(t)R_{22}(t) + R_{11}(t)R_{12}(t)R_{21}(t)R_{22}(t)
\end{aligned} \tag{5.42}$$

Ako komponente E_{11} i E_{12}, kao i komponente E_{21} i E_{22}, imaju jednaku pouzdanost, odnosno ako je $R_{11}(t) = R_{12}(t) = R_1(t)$ a $R_{21}(t) = R_{22}(t) = R_2(t)$, pouzdanost promatranog sustava određena je izrazom

$$R_S(t) = [R_1(t)R_2(t)]^2 - 2R_1^{\,2}(t)R_2(t) - 2R_1(t)R_2^{\,2}(t) + 4R_1(t)R_2(t) \tag{5.43}$$

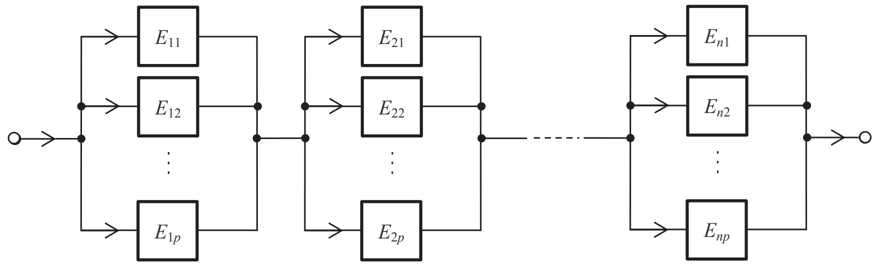
Ako su učestalosti kvara takvih komponenata konstantne, odnosno $\lambda_1(t) = \lambda_1$ i $\lambda_2(t) = \lambda_2$, zbog čega je $R_1(t) = e^{-\lambda_1 t}$ a $R_2(t) = e^{-\lambda_2 t}$, pouzdanost promatranog sustava određena je izrazom

$$R_S(t) = e^{-2(\lambda_1+\lambda_2)t} - 2e^{-(2\lambda_1+\lambda_2)t} - 2^{-(\lambda_1+2\lambda_2)t} + 4e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t} \tag{5.44}$$

Polazeći od općeg izraza (3.14), srednje vrijeme do kvara sustava određeno je izrazom

$$MTTF_S = \frac{9}{2(\lambda_1 + \lambda_2)} - \frac{2}{2\lambda_1 + \lambda_2} - \frac{2}{\lambda_1 + 2\lambda_2} \tag{5.45}$$

Općenito, neka se pretpostavi n-komponentni sustav serijske strukture s (p-1)-strukom zalihošću niske razine. *RBD* takvog sustava prikazan je na slici 5.9.



Slika 5.9. *RBD* n-komponentnog sustava serijske strukture s (p-1)-strukom zalihošću niske razine

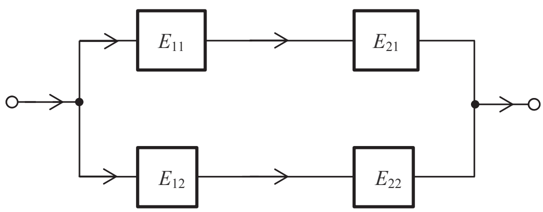
Opći je izraz za pouzdanost takvog sustava oblika

$$R_S(t) = \prod_{i=1}^{n} \left[1 - \prod_{j=1}^{p} \left[1 - R_j\,(t) \right] \right] \tag{5.46}$$

5.2.5.2 Sustav sa zalihošću visoke razine

Sustav sa zalihošću visoke razine sustav je takve strukture kod koje je zalihost izvedena na razini čitavog sustava.

Neka se pretpostavi dvokomponentni sustav serijske strukture koji je paralelno strukturiran s istim takvim sustavom. Za tako strukturiran cjelokupni sustav kaže se da je to dvokomponentni sustav s jednostrukom zalihošću visoke razine (Birolini, 1999). *RBD* tog sustava prikazan je na slici 5.10.



Slika 5.10. *RBD* dvokomponentnog sustava s jednostrukom zalihošću visoke razine

Polazeći od danih pretpostavki, pouzdanost promatranog sustava određena je općim izrazom

$$R_S(t) = P\{(e_{11} \cap e_{21}) \cup (e_{12} \cap e_{22})\} = P\{e_{11} \cap e_{21}\} + P\{e_{12} \cap e_{22}\} - P\{e_{11} \cap e_{21}\} \cdot P\{e_{12} \cap e_{22}\} =$$

$$P\{e_{11}\} \cdot P\{e_{21}\} + P\{e_{12}\} \cdot P\{e_{22}\} - P\{e_{11}\} \cdot P\{e_{21}\} \cdot P\{e_{12}\} \cdot P\{e_{22}\} \quad (5.47)$$

Nakon uvrštenja $P\{e_{11}\} = R_{11}(t)$, $P\{e_{12}\} = R_{12}(t)$, $P\{e_{21}\} = R_{21}(t)$ i $P\{e_{22}\} = R_{22}(t)$ i algebarskog uređenja dobiva se

$$R_S(t) = R_{11}(t)R_{21}(t) + R_{12}(t)R_{22}(t) - R_{11}(t)R_{12}(t)R_{21}(t)R_{22}(t) \quad (5.48)$$

Nadalje, ako komponente E_{11} i E_{12} odnosno E_{21} i E_{22} imaju jednaku pouzdanost, odnosno ako je $R_{11}(t) = R_{12}(t) = R_1(t)$, odnosno $R_{21}(t) = R_{22}(t) = R_2(t)$, pouzdanost promatranog sustava određena je izrazom

$$R_S(t) = 2R_1(t)R_2(t) - [R_1(t)R_2(t)]^2 \quad (5.49)$$

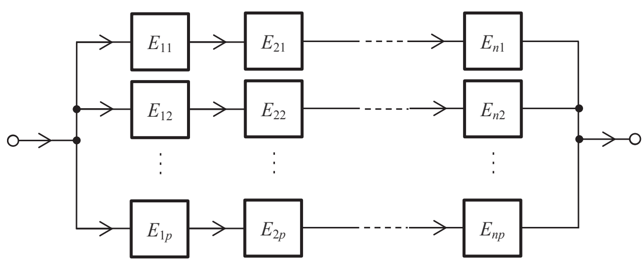
Ako su učestalosti kvara takvih komponenata konstantne, odnosno ako je $\lambda_1(t) = \lambda_1$ i $\lambda_2(t) = \lambda_2$, zbog čega je $R_1(t) = e^{-\lambda_1 t}$ a $R_2(t) = e^{-\lambda_2 t}$, pouzdanost promatranog sustava određena je izrazom

$$R_S(t) = 2e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} - e^{-2(\lambda_1 + \lambda_2)t} \quad (5.50)$$

Polazeći od općeg izraza (3.14), srednje vrijeme do kvara sustava određeno je izrazom

$$MTTF_S = \frac{3}{2(\lambda_1 + \lambda_2)} \quad (5.51)$$

Općenito, neka se pretpostavi n-komponentni sustav serijske strukture s (p-1)-strukom zalihošću visoke razine. *RBD* takvog sustava prikazan je na slici 5.11.



Slika 5.11. *RBD* n-komponentnog sustava serijske strukture s (p-1)-strukom zalihošću visoke razine

Opći je izraz za pouzdanost takvog sustava oblika

$$R_s(t) = 1 - \prod_{i=1}^{p}\left[1 - \prod_{j=1}^{n} R_{ij}(t)\right] \tag{5.52}$$

5.2.5.3 Međuodnos pouzdanosti sustava sa zalihošću niske i visoke razine

Neka se sad usporedi pouzdanost dvokomponentnog sustava s jednostrukom zalihošću niske razine s pouzdanošću odnosnog dvokomponentnog sustava s jednostrukom zalihošću visoke razine. Pritom, neka se pretpostavi da odnosne komponente u oba sustava imaju jednake pouzdanosti.

Pokazalo se da je pouzdanost dvokomponentnog sustava s jednostrukom zalihošću niske razine određena općim izrazom (5.43), a pouzdanost dvokomponentnog sustava s jednostrukom zalihošću visoke razine općim izrazom (5.49).

Ako se zbog jednostavnosti pretpostavi da sve komponente oba sustava imaju jednaku pouzdanost, odnosno da je $R_{11}(t) = R_{12}(t) = R_{21}(t) = R_{22}(t) = R(t)$, izraz (5.43) prelazi u oblik

$$R_S(t) = R^2(t)[2 - R(t)]^2 \tag{5.53}$$

a izraz (5.49) u oblik

$$R_S(t) = R^2(t)[2 - R^2(t)] \tag{5.54}$$

Razlika ovih dvaju izraza, označena s $\Delta R_S(t)$, jest

$$\Delta R_S(t) = 2R^2(t)[1 - R(t)]^2 \tag{5.55}$$

Budući da je ova razlika pozitivna za svako t, osim za $t = 0$ i $t \to \infty$, kad je jednaka nuli, pouzdanost je dvokomponentnog sustava s jednostrukom zalihošću niske razine veća od pouzdanosti ekvivalentnog dvokomponentnog sustava s jednostrukom zalihošću visoke razine, za svako $0 < t < \infty$.

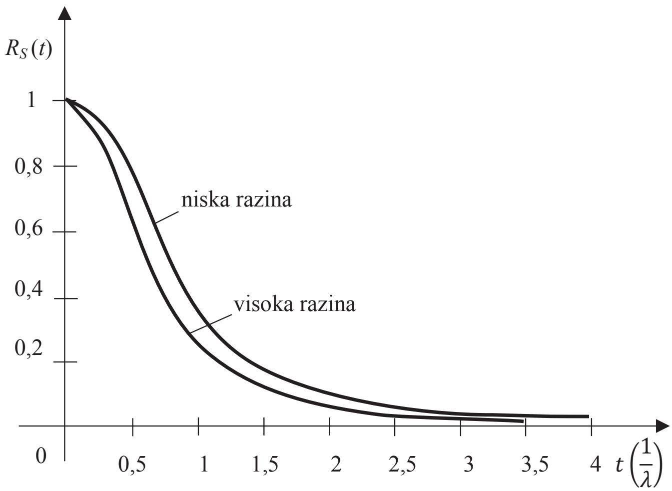
Neka se, radi ilustracije, pretpostavi da sve komponente oba sustava imaju konstantnu i jednaku učestalost kvara λ. Tada je pouzdanost promatranog sustava sa zalihošću niske razine određena izrazom

$$R_S(t) = e^{-2\lambda t}(2 - e^{-\lambda t})^2 \tag{5.56}$$

a sustava sa zalihošću visoke razine izrazom

$$R_S(t) = e^{-2\lambda t}(2 - e^{-2\lambda t}) \tag{5.57}$$

Dijagrami pouzdanosti oba promatrana sustava kao funkcije vremena prikazani su na slici 5.12.



Slika 5.12. Dijagrami pouzdanosti dvokomponentnih sustava sa zalihošću niske i visoke razine s komponentama konstantne i jednake učestalosti kvara

Zaključak koji proizlazi iz izraza (5.55) kao i iz dijagrama na slici 5.12., koji se odnosi na dvokomponentne sustave s jednostrukom zalihošću, vrijedi i općenito, odnosno za višekomponentne sustave s višestrukom zalihošću niske i visoke razine.

Dakle, sustav sa zalihošću niske razine ima veću pouzdanost od odnosnog sustava sa zalihošću visoke razine.

5.2.6 Pouzdanost sustava složenije strukture

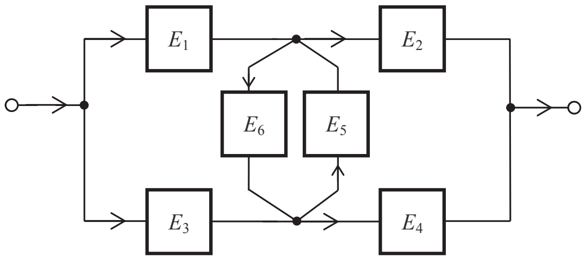
Većina praktičnih sustava nije takve strukture da se njihova pouzdanost može, bez većih poteškoća, svesti na postupnu uporabu pristupa za određivanje pouzdanosti sustava serijske strukture i sustava paralelne strukture. Za takve se sustave obično kaže da su **sustavi složenije strukture**. Za uspostavljanje pouzdanosti sustava takve strukture koriste se posebne metode, među kojima su poznatije metoda uspješnih staza i metoda ključne komponente.

5.2.6.1 Metoda uspješnih staza

U primjeni **metode uspješnih staza** (engl. *successful path method*), uspješnu stazu čini svaka serijska veza usmjerenih grana od ulaza do izlaza *RBD* sustava koja rezultira radnim stanjem sustava (Ebeling, 1997). Tada vjerojatnost unije svih uspješnih staza predstavlja pouzdanost sustava.

Primjerice, neka se metodom uspješnih staza odredi pouzdanost sustava čiji je *RBD* prikazan na slici 5.13. Iz *RBD* promatranog primjera razvidno je da postoje četiri uspješne staze. To su staze S_1, S_2, S_3 *i* S_4, za koje vrijedi

$$S_1 = e_1 \cap e_2,\ S_2 = e_3 \cap e_4,\ S_3 = e_1 \cap e_6 \cap e_4 \text{ i } S_4 = e_3 \cap e_5 \cap e_2.$$



Slika 5.13. Primjer *RBD* sustava složenije strukture

Pouzdanost promatranog sustava određena je izrazom

$$\begin{aligned}
&R_S(t) = P\{S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4\} = P\{S_1\} + P\{S_2\} + P\{S_3\} + P\{S_4\} - P\{S_1 \cap S_2\} - \\
&- P\{S_1 \cap S_3\} - P\{S_1 \cap S_4\} - P\{S_2 \cap S_3\} - P\{S_2 \cap S_4\} - P\{S_3 \cap S_4\} + \\
&+ P\{S_1 \cap S_2 \cap S_3\} + P\{S_1 \cap S_2 \cap S_4\} + P\{S_1 \cap S_3 \cap S_4\} + P\{S_2 \cap S_3 \cap S_4\} - \\
&- P\{S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4\} = P\{e_1 \cap e_2\} + P\{e_3 \cap e_4\} + P\{e_1 \cap e_4 \cap e_6\} + \\
&+ P\{e_2 \cap e_3 \cap e_5\} - P\{e_1 \cap e_2 \cap e_3 \cap e_4\} - P\{e_1 \cap e_2 \cap e_4 \cap e_6\} - \\
&- P\{e_1 \cap e_2 \cap e_3 \cap e_5\} - P\{e_1 \cap e_3 \cap e_4 \cap e_6\} - P\{e_2 \cap e_3 \cap e_4 \cap e_5\} - \\
&- P\{e_1 \cap e_2 \cap e_3 \cap e_4 \cap e_5 \cap e_6\} + P\{e_1 \cap e_2 \cap e_3 \cap e_4 \cap e_6\} + \\
&+ P\{e_1 \cap e_2 \cap e_3 \cap e_4 \cap e_5\} + P\{e_1 \cap e_2 \cap e_3 \cap e_4 \cap e_5 \cap_6\} + \\
&+ P\{e_1 \cap e_2 \cap e_3 \cap e_4 \cap e_5 \cap e_6\} - P\{e_1 \cap e_2 \cap e_3 \cap e_4 \cap e_5 \cap e_6\}
\end{aligned} \tag{5.58}$$

Budući da su događaji $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6$, odnosno radna stanja komponenata $E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6$, tijekom razdoblja $(0,t]$ međusobno neovisni, vjerojatnost njihovog međusobnog presjeka jednaka je umnošku vjerojatnosti tih događaja. Budući da vjerojatnost svakog od ovih događaja zapravo predstavlja pouzdanost odnosne komponente, pouzdanost je promatranog sustava, nakon algebarskog uređenja, određena izrazom

$$
\begin{aligned}
R_S(t) &= R_1(t)R_2(t) + R_3(t)R_4(t) + R_1(t)R_4(t)R_6(t) + R_2(t)R_3(t)R_5(t) - \\
&- R_1(t)R_2(t)R_3(t)R_4(t) - R_1(t)R_2(t)R_4(t)R_6(t) - R_1(t)R_2(t)R_3(t)R_5(t) - \\
&- R_1(t)R_3(t)R_4(t)R_6(t) - R_2(t)R_3(t)R_4(t)R_5(t) + R_1(t)R_2(t)R_3(t)R_4(t)R_5(t) + \\
&+ R_1(t)R_2(t)R_3(t)R_4(t)R_6(t)
\end{aligned} \tag{5.59}
$$

Uz pretpostavku da komponente imaju pripadne konstantne učestalosti kvara, odnosno $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6$, pouzdanost je sustava određena izrazom

$$
\begin{aligned}
R_S(t) = {} & e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t} + e^{-(\lambda_3+\lambda_4)t} + e^{-(\lambda_1+\lambda_4+\lambda_6)t} + e^{-(\lambda_2+\lambda_3+\lambda_5)t} - \\
& - e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4)t} - e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_4+\lambda_6)t} - e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_5)t} - e^{-(\lambda_1+\lambda_3+\lambda_4+\lambda_6)t} - \\
& - e^{-(\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4+\lambda_5)t} + e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4+\lambda_5)t} + e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4+\lambda_6)t}
\end{aligned} \tag{5.60}
$$

Polazeći od općeg izraza (3.14), srednje je vrijeme do kvara promatranog sustava određeno izrazom

$$
\begin{aligned}
MTTF_S = {} & \frac{1}{\lambda_1+\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_3+\lambda_4} + \frac{1}{\lambda_1+\lambda_4+\lambda_6} + \frac{1}{\lambda_2+\lambda_3+\lambda_5} - \\
& - \frac{1}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4} - \frac{1}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_4+\lambda_6} - \frac{1}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_5} - \\
& - \frac{1}{\lambda_1+\lambda_3+\lambda_4+\lambda_6} - \frac{1}{\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4+\lambda_5} + \frac{1}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4+\lambda_5} + \\
& + \frac{1}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4+\lambda_6}
\end{aligned} \tag{5.61}
$$

5.2.6.2 Metoda ključne komponente

Metoda ključne komponente (engl. *key component method*) zasniva se na primjeni teorema totalne vjerojatnosti (Birolini, 1999).

Događaj „sustav djeluje bez kvara u razdoblju $(0,t]$ “ ili kraće „sustav radi u $(0,t]$“, može se ostvariti sljedećim dvama komplementarnim događajima:

komponenta E_i radi u $(0,t] \cap$ sustav radi u $(0,t]$ i

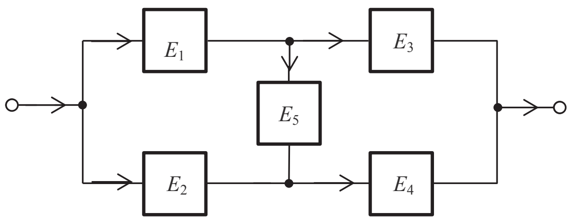
komponenta E_i je pokvarena u $(0,t] \cap$ sustav radi u $(0,t]$

Iz toga proizlazi da za funkciju pouzdanosti $R_S(t)$ vrijedi

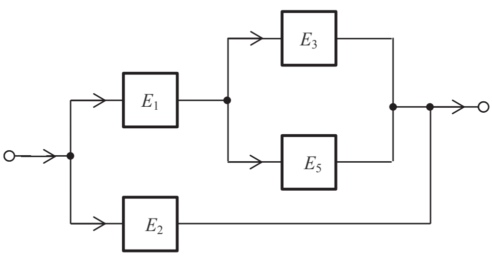
$$
\begin{aligned}
R_S(t) &= R_i(t)\cdot P\left\{\text{sustav radi u}(0,t] \mid E_i \text{ radi u } (0,t]\right\} + \\
&+ \left[1 - R_i(t)\right]\cdot P\left\{\text{sustav radi u}(0,t] \mid E_i \text{ ne radi u } (0,t]\right\}
\end{aligned}
\tag{5.62}
$$

pri čemu je $R_i(t) = P\{E_i \text{ radi u } (0,t]\} = P\{e_i\}$. Komponenta E_i mora biti odabrana tako da se dobije serijsko-paralelna struktura za *RBD* uvjetovana događajima $\{E_i \text{ radi u } (0,t]\}$ i $\{E_i \text{ ne radi u } (0,t]\}$.

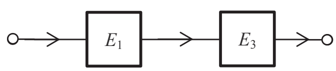
Neka se, kao primjer za primjenu ove metode, odredi pouzdanost sustava **jednosmjerne mosne strukture** čiji je *RBD* prikazan na slici 5.14.



RBD cjelokupnog sustava



RBD sustava ako E_4 radi u (0,*t*]



RBD sustava ako E_4 ne radi u (0,*t*]

Slika 5.14. Primjer *RBD* sustava jednosmjerne mosne strukture

Jednosmjerna mosna struktura sustava proizlazi iz pretpostavke da mosna komponenta E_5 radi u odnosu na zahtijevanu funkciju samo u jednom smjeru, odnosno od E_1 preko E_5 prema E_4. Komponenta E_4 na ključnom je položaju, odnosno predstavlja **ključnu komponentu sustava**. Polazeći od općeg izraza (5.62) za određivanje pouzdanosti $R_s(t)$ promatranog sustava, pri čemu je $E_i = E_4$, proizlazi da je

$$
\begin{aligned}
&R_S(t) = P\{e_4\}\cdot P\{[e_1 \cap (e_3 \cup e_5)] \cup e_2\} + P\{\bar{e}_4\}\cdot P\{e_1 \cap e_3\} = \\
&= P\{e_4\}\cdot \left(P\{e_1 \cap (e_3 \cup e_5)\} + P\{e_2\} - P\{e_1 \cap (e_3 \cup e_5)\}\cdot P\{e_2\}\right) + \\
&+ [1 - P\{e_4\}]\cdot P\{e_1 \cap e_3\} = P\{e_4\}\cdot [P\{e_1\}\cdot P\{e_3 \cup e_5\} + P\{e_2\} - \\
&P\{e_1\}\cdot P\{e_3 \cup e_5\}\cdot P\{e_2\}] + [1 - P\{e_4\}]\cdot P\{e_1\}\cdot P\{e_3\} = P\{e_4\}\cdot [P\{e_1\}\cdot [P\{e_3\} + P\{e_5\} - \\
&- P\{e_3\}\cdot P\{e_5\}] + P\{e_2\}] - [P\{e_1\}\cdot [P\{e_3\} + P\{e_5\} - P\{e_3\}\cdot P\{e_5\}]\cdot P\{e_2\}] + \\
&+ [1 - P\{e_4\}]\cdot P\{e_1\}\cdot P\{e_3\}
\end{aligned}
\tag{5.63}
$$

Budući da je $P\{e_i\} = R_i(t)$, za i = 1, 2, 3, 4, 5, pouzdanost je sustava, izražena pomoću pouzdanosti komponenata

$$
\begin{aligned}
&R_S(t) = R_4(t)[R_2(t) + R_1(t)[R_3(t) + R_5(t) - R_3(t)R_5(t)\ ] - \\
&- R_1(t)R_2(t)[\ R_3(t) + R_5(t) - R_3(t)R_5(t)\ ]] + (1 - R_4)R_1(t)R_3(t)
\end{aligned}
\tag{5.64}
$$

odnosno nakon algebarskog uređenja

$$
\begin{aligned}
&R_S(t) = R_1(t)R_3(t) + R_2(t)R_4(t) + R_1(t)R_4(t)R_5(t) - \\
&- R_1(t)R_2(t)R_3(t)R_4(t) - R_1(t)R_2(t)R_4(t)R_5(t) - R_1(t)R_3(t)R_4(t)R_5(t) + \\
&+ R_1(t)R_2(t)R_3(t)R_4(t)R_5(t)
\end{aligned}
\tag{5.65}
$$

Ako sve komponente imaju konstantnu učestalost kvara, redom $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5,$ pouzdanost sustava određena je izrazom

$$
\begin{aligned}
&R_S(t) = e^{-(\lambda_1+\lambda_3)t} + e^{-(\lambda_2+\lambda_4)t} + e^{-(\lambda_1+\lambda_4+\lambda_5)t} - e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4)t} - \\
&- e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_4+\lambda_5)t} - e^{-(\lambda_1+\lambda_3+\lambda_4+\lambda_5)t} + e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4+\lambda_5)t}
\end{aligned}
\tag{5.66}
$$

Polazeći od općeg izraza (3.14), srednje vrijeme do kvara sustava određeno je izrazom

$$MTTF_S = \frac{1}{\lambda_1+\lambda_3} + \frac{1}{\lambda_2+\lambda_4} + \frac{1}{\lambda_1+\lambda_4+\lambda_5} - \frac{1}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4} -$$
$$- \frac{1}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_4+\lambda_5} - \frac{1}{\lambda_1+\lambda_3+\lambda_4+\lambda_5} + \frac{1}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4+\lambda_5} \tag{5.67}$$

5.3 Pouzdanost sustava s međuovisnim komponentama

Sustav s međuovisnim komponentama sustav je kod kojeg kvar neke (ne bilo koje) njegove komponente utječe na učestalost kvara bar jedne druge komponente tog sustava. Tipični je primjer sustava s međuovisnim komponentama sustav s rezervom.

5.3.1 Sustav s rezervom

Sustav s rezervom (engl. *standby system*) zapravo je **sustav s pasivnom zalihošću** jer za vrijeme dok jedna od njegovih komponenata obavlja zahtijevanu funkciju sustava, s učestalošću kvara određene vrijednosti, preostale komponente sustava nalaze se u rezervi s učestalšću kvara obično jednakoj nuli. Ove komponente **komutator sustava** redoslijedno, jednu po jednu, automatski uključuje u djelovanje u trenucima nastupa kvara komponente koja se do tada nalazila u djelovanju. Naravno, u tim se trenucima učestalost kvara rezervne komponente koja se uključi u djelovanje skokovito promijeni s nule na određenu vrijednost.

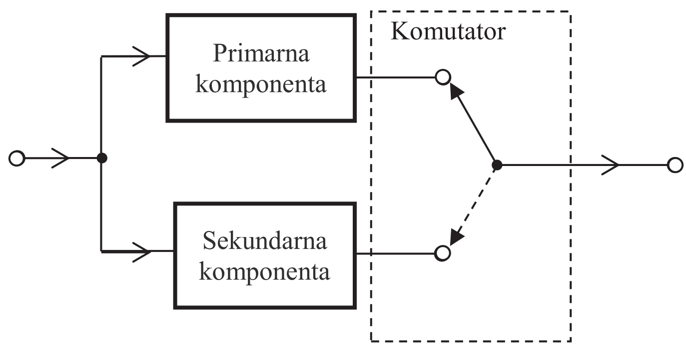
Prema tome, komponente su opisanog sustava međuovisne, jer se učestalost kvara komponenata u rezervi skokovito promijeni s nule na određenu vrijednost u trenutku nastupa kvara prethodne komponente uključene u djelovanje.

Ako je učestalost kvara komponenata kad se nalaze u djelovanju konstantna, što znači da je razdioba vremena do kvara komponenata eksponencijalna, za uspostavljanje prediktivnog modela pouzdanosti takvog sustava prikladno je, kao matematičku osnovu, koristiti Markovljev proces (Pukite i Pukite, 1998).

5.3.2 *Idealni dvokomponentni sustav s rezervom*

Idealni dvokomponentni sustav s rezervom takav je dvokomponentni sustav kod kojeg se komponenta koja se nalazi u rezervi (sekundarna komponenta) sigurno, odnosno s vjerojatnošću 1, automatski uključi u djelovanje u trenutku nastupa kvara komponente koja se do tada nalazila u djelovanju (primarna komponenta). To znači da komutator sustava s rezervom, kao sastavnica tog sustava ima, s funkcijskog stanovišta, pouzdanost jednaku jedinici u svakom trenutku. Simbolički prikaz takvog sustava dan je na slici 5.15.

Radi jednostavnosti, neka se pretpostavi da obje komponente, kad se nalaze u djelovanju, imaju jednaku učestalost kvara λ. Za primjenu Markovljeva procesa najprije je potrebno definirati karakteristična stanja sustava, koja zapravo predstavljaju stanja Markovljeva procesa (Pukite i Pukite, 1998).



Slika 5.15. Simbolički prikaz idealnog dvokomponentnog sustava s rezervom

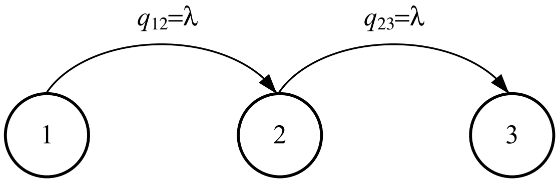
Za promatrani sustav karakteristična su sljedeća stanja:

Stanje 1: Primarna se komponenta nalazi u radnom stanju, a sekundarna u rezervi.

Stanje 2: Primarna se komponenta nalazi u kvarnom stanju, a sekundarna u radnom stanju.

Stanje 3: Obje se komponente nalaze u kvarnom stanju.

Radna su stanja sustava stanje 1 i stanje 2, a stanje 3 je kvarno. Učestalost prijelaza sustava iz stanja 1 u stanje 2, q_{12}, jednaka je učestalosti kvara primarne komponente λ , a učestalost prijelaza sustava iz stanja 2 u stanje 3, q_{23}, jednaka je učestalosti kvara sekundarne komponente λ kad je uključena u djelovanje. Učestalosti prijelaza između ostalih parova različitih stanja sustava jednake su nuli jer je sustav neobnovljiv. **Dijagram stanja sustava** prikazan je na slici 5.16.



Slika 5.16. Dijagram stanja za određivanje pouzdanosti idealnog neobnovljivog dvokomponentnog sustava s rezervom

Za promatrani sustav **matrica učestalosti prijelaza $\mathbf{Q}$** između stanja sustava oblika je

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda & \lambda \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.68}$$

Pripadni je **Kolmogorovljev sustav diferencijalnih jednadžbi**, iskazan u vektorsko-matričnom obliku,

$$(P_1^{'}(t), P_2^{'}(t), P_3^{'}(t)) = (P_1(t), P_2(t), P_3(t)) = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda & \lambda \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.69}$$

Pouzdanost sustava $R_S(t)$ određena je zbrojem vjerojatnosti njegovih radnih stanja, odnosno zbrojem vjerojatnosti stanja 1 i vjerojatnosti stanja 2. Dakle,

$$R_S(t) = P_1(t) + P_2(t) \tag{5.70}$$

Budući da je stanje 3 kvarno, zbog čega je za određivanje pouzdanosti **apsorbirajuće stanje sustava**, za određivanje pouzdanosti promatranog sustava koristi se **reducirana matrica učestalosti prijelaza** $\mathbf{Q}_R$ (Høyland i Rausand, 1994) oblika

$$\mathbf{Q}_R = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda \\ 0 & -\lambda \end{bmatrix} \tag{5.71}$$

Tada su vjerojatnosti $P_1(t)$ i $P_2(t)$ rješenja sustava diferencijalnih jednadžbi iskazanog u obliku

$$(P_1^{'}(t), P_2^{'}(t)) = (P_1(t), P_2(t)) \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda \\ 0 & -\lambda \end{bmatrix} \tag{5.72}$$

odnosno

$$\begin{aligned} &P_1^{'}(t) + \lambda P_1(t) = 0 \\ &P_2^{'}(t) - \lambda P_1(t) + \lambda P_2(t) = 0 \end{aligned} \tag{5.73}$$

Primjenom **Laplaceovih transformacija** (Elezović, 2010) na ovaj sustav diferencijalnih jednadžbi dobiva se

$$\begin{aligned} &sP_1^*(s) - P_1(0) + \lambda P_1^*(s) = 0 \\ &sP_2^*(s) - P_2(0) - \lambda P_1^*(s) + \lambda P_2^*(s) = 0 \end{aligned} \tag{5.74}$$

Uzimajući u obzir početni uvjet, $P_1(0) = 1$ i $P_2(0) = 0,$ sustav diferencijalnih jednadžbi transformira se u **sustav algebarskih jednadžbi** s nepoznanicama $P_1^*(s)$ i $P_2^*(s)$ oblika

$$\begin{aligned} &(s+\lambda)P_1^*(s) = 1 \\ &-\lambda P_1^*(s) + (s+\lambda)P_2^*(s) = 0 \end{aligned} \tag{5.75}$$

Iz tog sustava algebarskih jednadžbi proizlazi da je

$$\begin{aligned} &P_1^*(s) = \frac{1}{s+\lambda} \\ &P_2^*(s) = \frac{\lambda}{(s+\lambda)^2} \end{aligned} \tag{5.76}$$

Primjenom **inverzne Laplaceove transformacije** (Elezović, 2010) na ove izraze dobiva se

$$P_1(t) = e^{-\lambda t}$$
$$P_2(t) = \lambda t e^{-\lambda t} \tag{5.77}$$

Zbrajanjem ovih dviju vjerojatnosti dobiva se izraz za pouzdanost promatranog sustava oblika

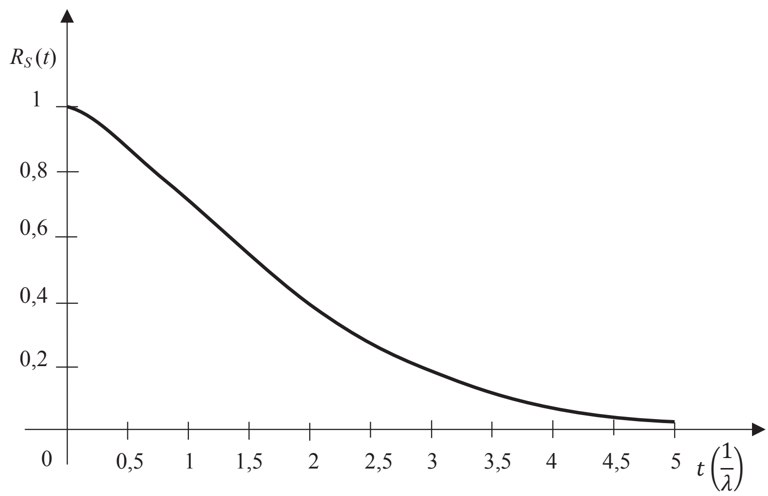
$$R_S(t) = (1+\lambda t)e^{-\lambda t} \tag{5.78}$$

Vremenski dijagram pouzdanosti promatranog sustava prikazan je na slici 5.17.

Polazeći od općeg izraza (3.14), srednje vrijeme do kvara promatranog sustava određeno je izrazom

$$MTTF_S = 2\frac{1}{\lambda} = 2\ MTTF \tag{5.79}$$

pri čemu je $MTTF$ srednje vrijeme do kvara svake komponente sustava kad je uključena u djelovanje. Ovaj izraz pokazuje da je srednje vrijeme do kvara idealnog neobnovljivog dvokomponentnog sustava s rezervom jednako zbroju srednjih vremena do kvara njegovih komponenata kad se nalaze u djelovanju.



Slika 5.17. Vremenski dijagram pouzdanosti idealnog dvokomponentnog neobnovljivog sustava s rezervom čije komponente u djelovanju imaju konstantne i jednake učestalosti kvara

Srednje vrijeme do kvara promatranog sustava može se dobiti i izravno iz Laplaceove transformacije izraza za pouzdanost koristeći svojstvo B 1.1. iz Dodatka B, prema kojem je Laplaceova transformacija izraza za pouzdanost jednaka zbroju Laplaceovih transformacija izraza za vjerojatnost stanja 1 i vjerojatnost stanja 2, odnosno

$$R_S^*(s) = P_1^*(s) + P_2^*(s) = \frac{1}{s+\lambda} + \frac{\lambda}{(s+\lambda)^2} \tag{5.80}$$

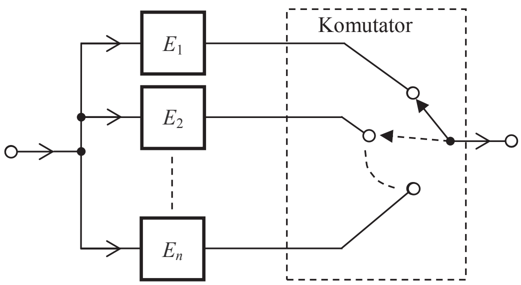
Prema svojstvu danom izrazom (3.15) proizlazi

$$MTTF_S = R_S^*(s)\Big|_{s=0} = \frac{1}{\lambda} + \frac{\lambda}{\lambda^2} = 2\frac{1}{\lambda} = 2\,MTTF \tag{5.81}$$

što je identično izrazu (5.79).

Pretpostavi li se neobnovljiv idealni n-komponentni sustav s rezervom prikazan na slici 5.18., pri čemu sve komponente imaju konstantnu i jednaku učestalost kvara kad se nalaze u djelovanju, a učestalost kvara 0 kad se nalaze u rezervi, pouzdanost sustava određena je općim izrazom

$$R_S(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(\lambda t)^{i-1}}{(i-1)!} e^{-\lambda t} \tag{5.82}$$



Slika 5.18. Idealni n-komponentni sustav s rezervom

6. POUZDANOST OBNOVLJIVIH SUSTAVA

U ovom se poglavlju preciznije definira pouzdanost višekomponentnih obnovljivih sustava i predstavlja pristup uspostavljanju Markovljevog modela pouzdanosti i srednjeg vremena do kvara sustava polazeći od poznavanja strukture te učestalosti kvara i učestalosti obnove komponenata tih sustava.

6.1 Općenito o pouzdanosti obnovljivih sustava

Obnovljiv sustav onaj je sustav koji tvore komponente koje se nakon nastupa kvara obnavljaju i ponovo uključuju u djelovanje ili se zamjenjuju ispravnima.

Analogno pouzdanosti neobnovljivog sustava, **pouzdanost obnovljivog sustava** vremenski je ovisna veličina, iskazana funkcijom $R_S(t)$, definirana vjerojatnošću da je vrijeme do kvara sustava veće od proizvoljno odabranog vremena t proteklog od trenutka $t = 0$ kad je sustav uključen u djelovanje, uz uvjet da se u tom trenutku sve njegove komponente nalaze u radnom stanju.

Budući da se radi o obnovljivom sustavu, pouzdanost takvog sustava ovisi o

(1) pouzdanosti komponenata,
(2) obnovljivosti komponenata,
(3) strukturi (građi) sustava i
(4) međuovisnosti komponenata.

Međutim, treba naglasiti da obnovljivost komponenata može utjecati na pouzdanost samo obnovljivih zalihosnih sustava uz pretpostavku da se tijekom obnavljanja kvarnih komponenata sustavi ne isključuju iz djelovanja.

Razumljivo je da obnavljanje ili zamjena kvarnih komponenata nezalihosnih sustava, poput jednokomponentnih sustava ili sustava serijske strukture, nema utjecaja na pouzdanost sustava jer je kvar bilo koje komponente takvih sustava ujedno i njihov kvar, pa obnavljanje ili zamjena kvarnih komponenata ispravnima, koliko god kratko trajalo, nema više utjecaja na pouzdanost.

Radi li se o obnovljivim zalihosnim sustavima stalno uključenim u djelovanje, stanja (radna i kvarna) njihovih komponenata uzastopno se izmjenjuju, što uvjetuje uzastopnu izmjenu stanja sustava, od kojih su neka radna, a neka kvarna. Ta izmjena stanja sustava predstavlja slučajni proces. Pretpostavljajući da komponente imaju konstantnu učestalost kvara λ i konstantnu učestalost obnove μ, odnosno da imaju eksponencijalnu razdiobu vjerojatnosti vremena do kvara T_F i eksponencijalnu razdiobu vjerojatnosti vremena do obnove T_R, kao osnovu za matematičko modeliranje ovog procesa prikladno je koristiti Markovljev proces (Pukite i Pukite, 1998).

U nastavku izlaganja uspostavit će se matematički model pouzdanosti obnovljivog dvokomponentnog sustava paralelne strukture i obnovljivog idealnog dvokomponentnog sustava s rezervom, dakle zalihosnih sustava, uporabom Markovljevog procesa kao matematičke osnove. Također, za ove će se sustave odrediti izrazi za srednje vrijeme do kvara.

6.2 Pouzdanost obnovljivog dvokomponentnog sustava paralelne strukture

Neka se pretpostavi obnovljiv dvokomponentni sustav paralelne strukture, dakle obnovljiv dvokomponentni sustav s **jednostukom aktivnom zalihošću**. Nadalje, neka komponente imaju konstantne i jednake učestalosti kvara λ i konstantne i jednake učestalosti obnove μ, što znači da su razdiobe vjerojatnosti vremena do kvara i razdiobe vjerojatnosti vremena do obnove eksponencijalne. Zbog toga je za uspostavljanje prediktivnog matematičkog modela pouzdanosti sustava kao matematičku osnovu prikladno koristiti Markovljev proces. U tu se svrhu definiraju karakteristična stanja sustava, što su ujedno i stanja Markovljeva procesa.

Za promatrani sustav karakteristična su sljedeća stanja:

Stanje 1: Obje se komponente nalaze u radnom stanju.

Stanje 2: Jedna se komponenata nalazi u radnom, a druga u kvarnom stanju i obnavlja se ili zamjenjuje ispravnom.

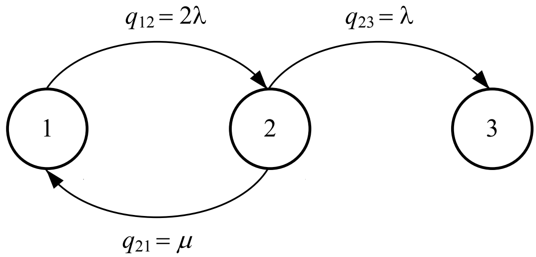
Stanje 3: Obje se komponente nalaze u kvarnom stanju.

Radna su stanja sustava stanje 1 i stanje 2, a stanje 3 je kvarno. Učestalost prijelaza iz stanja 1 u stanje 2, q_{12}, jednaka je 2λ (jer je ta učestalost uvjetovana učestalošću kvara bilo koje od tih dviju komponenata), učestalost prijelaza iz stanja 2 u stanje 3, q_{23}, jednaka je λ (jer je ta učestalost određena učestalošću kvara preostale komponente koja se nalazi u radnom stanju), a učestalost prijelaza između stanja 2 i stanja 1, q_{21}, jednaka je μ, odnosno učestalosti obnove kvarne komponente. Učestalosti prijelaza između ostalih parova različitih stanja sustava jednake su nuli. Sa stanovišta određivanja njegove pouzdanosti, stanje 3 sustava apsorbirajuće je. Dijagram stanja za određivanje pouzdanosti sustava prikazan je na slici 6.1.

Matrica učestalosti prijelaza $\mathbf{Q}$ za određivanje pouzdanosti promatranog sustava oblika je

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\lambda & 2\lambda & 0 \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{6.1}$$

Budući da su stanja sustava međusobno isključiva, pouzdanost sustava, $R_S(t)$, jednaka je zbroju vjerojatnosti njegovih radnih stanja, odnosno stanja 1 i stanja 2.



Slika 6.1. Dijagram stanja za određivanje pouzdanosti dvokomponentnog sustava paralelne strukture

Kako je stanje 3 kvarno (zbog čega je za određivanje pouzdanosti sustava apsorbirajuće), za određivanje pouzdanosti promatranog sustava koristi se reducirana matrica učestalosti prijelaza $\mathbf{Q}_R$ (Høyland i Rausand, 1994) oblika

$$\mathbf{Q}_R = \begin{bmatrix} -2\lambda & 2\lambda \\ \mu & -(\lambda+\mu) \end{bmatrix} \tag{6.2}$$

Vjerojatnosti radnih stanja $P_1(t)$ i $P_2(t)$ rješenja su sustava diferencijalnih jednadžbi oblika

$$(P_1'(t), P_2'(t)) = (P_1(t), P_2(t))\begin{bmatrix} -2\lambda & 2\lambda \\ \mu & -(\lambda+\mu) \end{bmatrix} \tag{6.3}$$

odnosno

$$\begin{aligned} &P_1'(t) + 2\lambda P_1(t) - \mu P_2(t) = 0 \\ &P_2'(t) - 2\lambda P_1(t) + (\lambda+\mu)P_2(t) = 0 \end{aligned} \tag{6.4}$$

Primjenom Laplaceovih transformacija na ovaj sustav diferencijalnih jednadžbi dobiva se

$$sP_1^*(s) - P_1(0) + 2\lambda P_1^*(s) - \mu P_2^*(s) = 0$$
$$sP_2^*(s) - P_2(0) - 2\lambda P_1^*(s) + (\lambda+\mu)P_2^*(s) = 0$$

Uzimajući u obzir početni uvjet, $P_1(0) = 1$ a $P_2(0) = 0,$ dobiva se sustav algebarskih jednadžbi s nepoznanicama $P_1^*(s)$ i $P_2^*(s)$ oblika

$$\begin{aligned} &(s+2\lambda)P_1^*(s) - \mu P_2^*(s) = 1 \\ &-2\lambda P_1^*(s) + (s+\lambda+\mu)P_2^*(s) = 0 \end{aligned} \tag{6.5}$$

Rješavanjem ovog sustava algebarskih jednadžbi dobiju se izrazi za $P_1^*(s)$ i $P_2^*(s)$ oblika

$$P_1^*(s) = \frac{s+\lambda+\mu}{s^2+(3\lambda+\mu)s+2\lambda^2} \tag{6.6}$$

$$P_2^*(s) = \frac{2\lambda}{s^2+(3\lambda+\mu)s+2\lambda^2} \tag{6.7}$$

Da bi se primjenom inverzne Laplaceove transformacije izraza za $P_1^*(s)$ i $P_2^*(s)$ dobili izrazi za vjerojatnosti $P_1(t)$ i $P_2(t)$, najprije treba odrediti korijene polinoma u nazivnicima jednadžbi (6.6) i (6.7). Oni su:

$$r_1 = \frac{-(3\lambda + \mu) + \sqrt{\lambda^2 + 6\lambda\mu + \mu^2}}{2} \tag{6.8a}$$

$$r_2 = \frac{-(3\lambda + \mu) - \sqrt{\lambda^2 + 6\lambda\mu + \mu^2}}{2} \tag{6.8b}$$

i oba imaju negativne vrijednosti za svako (pozitivno) λ i μ.

Jednadžbe (6.6) i (6.7) tada se mogu izraziti u oblicima

$$P_1^*(s) = \frac{s + \lambda + \mu}{(s - r_1)(s - r_2)} = \frac{s}{(s - r_1)(s - r_2)} + \frac{\lambda + \mu}{(s - r_1)(s - r_2)} \tag{6.9}$$

$$P_2^*(s) = \frac{2\lambda}{(s - r_1)(s - r_2)} \tag{6.10}$$

Primjenom inverznih Laplaceovih transformacija B 2.7. i B 2.8. iz Dodatka B vjerojatnosti stanja $P_1(t)$ i $P_2(t)$ određene su izrazima

$$\begin{aligned} P_1(t) &= \frac{r_1 + \lambda + \mu}{r_1 - r_2} e^{r_1 t} + \frac{r_2 + \lambda + \mu}{r_2 - r_1} e^{r_2 t} \\ P_2(t) &= \frac{2\lambda}{r_1 - r_2} e^{r_1 t} + \frac{2\lambda}{r_2 - r_1} e^{r_2 t} \end{aligned} \tag{6.11}$$

Zbroj ovih vjerojatnosti daje izraz za pouzdanost promatranog sustava, koji je općeg oblika

$$R_S(t) = \frac{r_1 e^{r_2 t} - r_2 e^{r_1 t}}{r_1 - r_2} \tag{6.12}$$

Dijagramima na slici 6.2. prikazana je vremenska ovisnost pouzdanosti promatranog sustava uz omjer učestalosti obnove i učestalosti kvara komponenata kao parametar.

Srednje vrijeme do kvara promatranog sustava dobije se izravno iz Laplaceove transformacije izraza za pouzdanost, koristeći svojstvo B 1.1. iz Dodatka B, prema kojem je Laplaceova transformacija izraza za pouzdanost jednaka zbroju Laplaceovih transformacija izraza za vjerojatnost stanja 1 i vjerojatnost stanja 2, odnosno

$$R_S^*(s) = \frac{s+\lambda+\mu}{s^2+(3\lambda+\mu)s+2\lambda^2} + \frac{2\lambda}{s^2+(3\lambda+\mu)s+2\lambda^2} \tag{6.13}$$

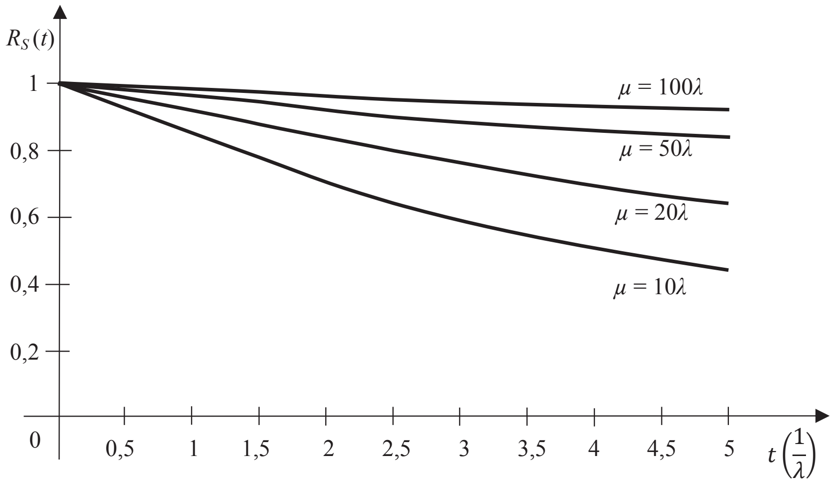
Polazeći od općeg izraza (3.15), srednje vrijeme do kvara sustava određeno je izrazom

$$MTTF_S = R_S^*(s)\Big|_{s=0} = \frac{\lambda+\mu}{2\lambda^2} + \frac{2\lambda}{2\lambda^2} = \frac{3\lambda+\mu}{2\lambda^2} \tag{6.14}$$

odnosno

$$MTTF_S = \frac{1}{2}\left(3+\frac{\mu}{\lambda}\right)\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2}\left(3+\frac{\mu}{\lambda}\right)MTTF \tag{6.15}$$

pri čemu je $MTTF$ srednje vrijeme do kvara svake komponente promatranog sustava. Izraz (6.15) pokazuje da se povećanjem učestalosti obnove prema učestalosti kvara komponenata znatno povećava srednje vrijeme do kvara promatranog sustava.



Slika 6.2. Vremenski dijagram pouzdanosti dvokomponentnog sustava paralelne strukture s komponentama konstantne i jednake učestalosti kvara i učestalosti obnove

6.3 Pouzdanost idealnog obnovljivog dvokomponentnog sustava s rezervom

Neka se pretpostavi obnovljiv idealni dvokomponentni sustav s rezervom, dakle, obnovljiv idealni dvokomponentni sustav s **jednostrukom pasivnom zalihošću**. Primarna se komponenta sustava nakon kvara obnavlja, a sekundarna je komponenta nepokvarljiva kad se nalazi u rezervi i sigurno se (s vjerojatnošću 1) uključi u djelovanje u bilo kojem trenutku nastupa kvara primarne komponente. Nadalje, neka komponente imaju konstantne i jednake učestalosti kvara λ kad su uključene u djelovanje te konstantne i jednake učestalosti obnove μ, što znači da su razdiobe vjerojatnosti vremena do kvara i razdiobe vjerojatnosti vremena do obnove komponenata eksponencijalne. Zbog toga je za uspostavljanje prediktivnog modela pouzdanosti sustava kao matematičku osnovu prikladno koristiti Markovljev proces (Pukite i Pukite, 1998). U tu se svrhu definiraju karakteristična stanja sustava, koja su ujedno i stanja Markovljeva procesa.

Za promatrani sustav karakteristična su sljedeća stanja:

Stanje 1: Primarna se komponenta nalazi u radnom stanju, a sekundarna u rezervi.

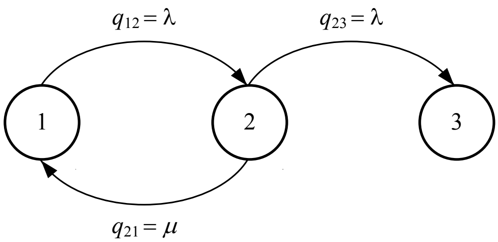
Stanje 2: Primarna se komponenta nalazi u kvarnom stanju i obnavlja se ili zamjenjuje ispravnom, a sekundarna se komponenta nalazi u radnom stanju.

Stanje 3: Obje se komponente nalaze u kvarnom stanju.

Radna su stanja sustava stanje 1 i stanje 2, a stanje 3 je kvarno. Učestalost prijelaza sustava iz stanja 1 u stanje 2, q_{12}, jednaka je učestalosti kvara primarne komponente λ, učestalost prijelaza sustava iz stanja 2 u stanje 3, q_{23}, jednako je učestalosti kvara sekundarne komponente λ, a učestalost prijelaza sustava iz stanja 2 u stanje 1, q_{21}, jednako je učestalosti obnove komponente μ. Učestalosti prijelaza između ostalih parova različitih stanja sustava jednake su nuli. Za određivanje pouzdanosti stanje 3 sustava apsorbirajuće je. Dijagram stanja za određivanje pouzdanosti ovog sustava prikazan je na slici 6.3.

Za promatrani je sustav matrica učestalosti prijelaza $\mathbf{Q}$ za određivanje pouzdanosti oblika

$$\mathbf{Q}=\begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{6.16}$$



Slika 6.3. Dijagram stanja za određivanje pouzdanosti obnovljivog idealnog dvokomponentnog sustava s rezervom

Budući da su stanja sustava međusobno isključiva, pouzdanost sustava $R_S(t)$ određena je zbrojem vjerojatnosti njegovih radnih stanja, odnosno zbrojem vjerojatnosti stanja 1, $P_1(t)$, i vjerojatnosti stanja 2, $P_2(t)$.

Budući da je stanje 3 kvarno (zbog čega je za određivanje pouzdanosti sustava apsorbirajuće), za određivanje pouzdanosti promatranog sustava koristi se reducirana matrica učestalosti prijelaza $\mathbf{Q}_R$ oblika

$$\mathbf{Q}_R=\begin{bmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -(\lambda+\mu) \end{bmatrix} \tag{6.17}$$

Vjerojatnosti $P_1(t)$ i $P_2(t)$ rješenja su sustava diferencijalnih jednadžbi iskazanog u obliku

$$(P_1'(t),P_2'(t))=(P_1(t),P_2(t))\begin{bmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -(\lambda+\mu) \end{bmatrix} \tag{6.18}$$

odnosno

$$\begin{aligned} &P_1'(t) + \lambda P_1(t) - \mu P_2(t) = 0 \\ &P_2'(t) - \lambda P_1(t) + (\lambda + \mu) P_2(t) = 0 \end{aligned} \tag{6.19}$$

Rješavanjem ovog sustava diferencijalnih jednadžbi primjenom Laplaceovih transformacija uz početni uvjet da je $P_1(0) = 1$ i $P_2(0) = 0$, dobiva se sustav algebarskih jednadžbi oblika

$$\begin{aligned} &(s + \lambda) P_1^*(s) - \mu P_2^*(s) = 1 \\ &-\lambda P_1^*(s) + (s + \lambda + \mu) P_2^*(s) = 0 \end{aligned} \tag{6.20}$$

Rješavanjem ovog sustava algebarskih jednadžbi dobiju se izrazi za $P_1^*(s)$ i $P_2^*(s)$ oblika

$$P_1^*(s) = \frac{s + \lambda + \mu}{s^2 + (2\lambda + \mu)s + \lambda^2} \tag{6.21}$$

$$P_2^*(s) = \frac{\lambda}{s^2 + (2\lambda + \mu) + \lambda^2} \tag{6.22}$$

Da bi se primjenom inverzne Laplaceove transformacije izraza za $P_1^*(s)$ i $P_2^*(s)$ dobili izrazi za vjerojatnosti $P_1(t)$ i $P_2(t)$, najprije treba odrediti korijene polinoma u nazivnicima jednadžbi (6.21) i (6.22). Oni su

$$r_1 = \frac{-(2\lambda + \mu) + \sqrt{4\lambda\mu + \mu^2}}{2} \tag{6.23a}$$

$$r_2 = \frac{-(2\lambda + \mu) - \sqrt{4\lambda\mu + \mu^2}}{2} \tag{6.23b}$$

i oba imaju negativne vrijednosti za svako (pozitivno) λ i μ. Jednadžbe (6.21) i (6.22) tada se mogu izraziti oblicima

$$P_1^*(s) = \frac{s + \lambda + \mu}{(s - r_1)(s - r_2)} = \frac{s}{(s - r_1)(s - r_2)} + \frac{\lambda + \mu}{(s - r_1)(s - r_2)} \tag{6.24}$$

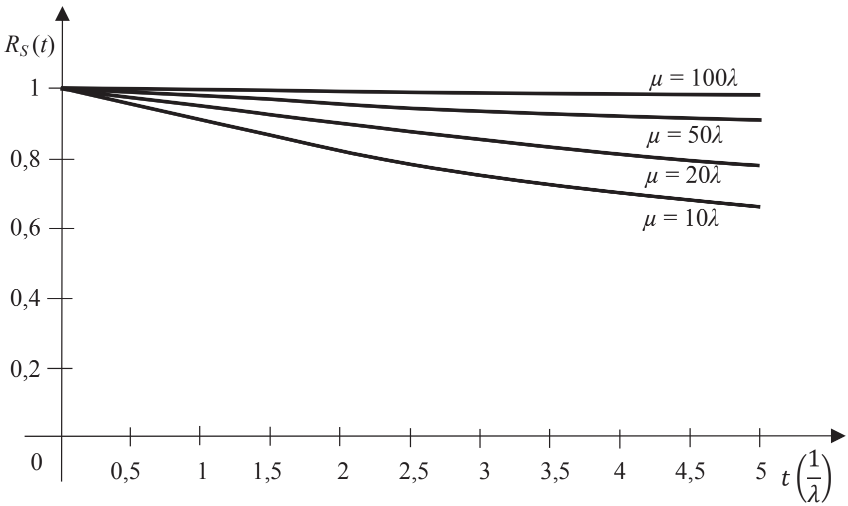
$$P_2^*(s) = \frac{\lambda}{(s - r_1)(s - r_2)} \tag{6.25}$$

Inverznom Laplaceovom transformacijom B 2.7 i B 2.8 iz Dodatka B vjerojatnosti stanja $P_1(t)$ i $P_2(t)$ određene su izrazima

$$\begin{aligned} P_1(t) &= \frac{r_1 + \lambda + \mu}{r_1 - r_2} e^{r_1 t} + \frac{r_2 + \lambda + \mu}{r_2 - r_1} e^{r_2 t} \\ P_2(t) &= \frac{\lambda}{r_1 - r_2} e^{r_1 t} + \frac{\lambda}{r_2 - r_1} e^{r_2 t} \end{aligned} \tag{6.26}$$

Zbroj ovih vjerojatnosti daje izraz za pouzdanost promatranog sustava koji je identičnog općeg oblika kao i izraz (6.12).

Dijagramima prikazanim na slici 6.4. prikazana je vremenska ovisnost pouzdanosti promatranog sustava uz omjer učestalosti obnove i učestalosti kvara komponenata kao parametar.



Slika 6.4. Vremenski dijagram pouzdanosti idealnog dvokomponentnog sustava s rezervom s komponentama konstantne i jednake učestalosti kvara i učestalosti obnove

Srednje se vrijeme do kvara promatranog sustava dobije izravno iz Laplaceove transformacije izraza za pouzdanost, koristeći svojstvo B 1.1. iz Dodatka B, prema kojem je Laplaceova transformacija izraza za pouzdanost jednaka zbroju Laplaceovih transformacija izraza za vjerojatnost stanja 1 i vjerojatnost stanja 2, odnosno

$$R_S^{\ast}(s)=\frac{s+\lambda+\mu}{s^2+(2\lambda+\mu)s+\lambda^2}+\frac{\lambda}{s^2+(2\lambda+\mu)s+\lambda^2} \tag{6.27}$$

Polazeći od općeg izraza (3.15), srednje vrijeme do kvara sustava određeno je izrazom

$$MTTF_S=R_S^{\ast}(s)\Big|_{s=0}=\frac{\lambda+\mu}{\lambda^2}+\frac{\lambda}{\lambda^2}=\frac{2\lambda+\mu}{\lambda^2}$$

odnosno

$$MTTF_S=\left(2+\frac{\mu}{\lambda}\right)\frac{1}{\lambda}=\left(2+\frac{\mu}{\lambda}\right)MTTF \tag{6.28}$$

pri čemu je $MTTF$ srednje vrijeme do kvara svake komponente promatranog sustava. Izraz (6.28) pokazuje da se povećanjem učestalosti obnove prema učestalosti kvara komponenata znatno povećava srednje vrijeme do kvara promatranog sustava.

7. RASPOLOŽIVOST SUSTAVA

U ovom se poglavlju preciznije definira pojam i odnos između trenutačne, intervalne i asimptotske raspoloživosti jednokomponentnog i višekomponentnih sustava i predstavlja pristup uspostavljanju prediktivnog Markovljevog modela trenutačne raspoloživosti, polazeći od poznavanja strukture te učestalosti kvara i učestalosti obnove komponenata tih sustava.

7.1 Općenito o raspoloživosti sustava

Pod **raspoloživošću** (engl. *availability*) **sustava** koji je stalno uključen u djelovanje podrazumijeva se njegova sposobnost obavljanja zahtijevane funkcije, iskazana u odnosu na promatrani trenutak ili u odnosu na promatrano razdoblje tijekom njegovog djelovanja. Pritom se tijekom djelovanja sustava pretpostavlja uzastopna izmjena stanja sustava, uzrokovana nastupom kvara komponenata i obnove (ili zamjene) kvarnih komponenata tog sustava. Uzastopna izmjena tih stanja sustava tijekom vremena predstavlja slučajni proces jer je vrijeme boravka u svakom od stanja slučajna veličina sa značajkama kontinuirane slučajne varijable.

Imaju li komponente sustava konstantne učestalosti kvara i konstantne učestalosti obnove, odnosno imaju li vremena zadržavanja sustava u svakom od stanja eksponencijalnu razdiobu, tijek uzastopne izmjene stanja sustava tijekom vremena ima značajke Markovljeva procesa. Pritom stanja sustava predstavljaju stanja Markovljeva procesa a učestalosti prijelaza između stanja sustava predstavljaju učestalosti prijelaza između stanja tog procesa.

Raspoloživost se sustava može, zavisno od interesa, iskazati trima veličinama: trenutačnom raspoloživošću, intervalnom raspoloživošću i asimptotskom raspoloživošću.

Trenutačna raspoloživost (engl. *instantaneous availability*) **sustava**, označena s $A_S(t)$, definirana je vjerojatnošću radnog stanja sustava u trenutku isteka vremena t, proteklog od trenutka $t=0$, kad je sustav uključen u djelovanje, uz uvjet da se u tom trenutku sustav nalazi u stanju određenom radnim stanjem svih njegovih komponenata.

Intervalna raspoloživost sustava za vremenski interval (t_1,t_2), $t_2 > t_1$, označena s $\overline{A_S}(t_1,t_2)$, definirana je srednjom vrijednošću trenutačne raspoloživosti komponente u tom intervalu. Prema tome, ova je raspoloživost određena izrazom

$$\overline{A_S}(t_1,t_2) = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} A_S(t)dt \tag{7.1}$$

Asimptotska raspoloživost sustava, označena s A_S, definirana je graničnom vrijednošću, ako postoji, trenutačne raspoloživosti sustava ako vrijeme t, proteklo od trenutka $t=0$, kad je sustav uključen u djelovanje, teži u beskonačnost. Dakle,

$$A_S = \lim_{t\to\infty} A_S(t) \tag{7.2}$$

Budući da je u mnogim primjenama od interesa samo poznavanje asimptotske raspoloživosti sustava, njezino bi određivanje prema izrazu (7.2) zahtijevalo prethodno određivanje izraza za trenutačnu raspoloživost, što je često vrlo mukotrpno. Taj pristup, međutim, nije potreban uzme li se u obzir da je asimptotska raspoloživost sustava konstantna i jednaka zbroju asimptotskih vjerojatnosti svih radnih stanja sustava, koje su također konstantne kad vrijeme teži u beskonačnost. Dakle,

$$A_S = \sum_{j\in B} P_j \tag{7.3}$$

pri čemu je s P_j označena asimptotska vjerojatnost j-tog stanja iz skupa B svih radnih stanja od ukupno n mogućih stanja sustava. Budući da su asimptotske vjerojatnosti svih stanja sustava konstantne, odnosno vremenski neovisne, njihove su derivacije po vremenu jednake nuli, odnosno

$$\lim_{t\to\infty} P_j^{'}(t) = 0 \text{ za } j = 1,2,....,n \tag{7.4}$$

Zbog toga su asimptotske vjerojatnosti svih stanja sustava rješenja sustava algebarskih jednadžbi koje proizlaze iz Kolmogorovljeva sustava diferencijalnih jednadžbi u kojima se pretpostavlja da su derivacije vjerojatnosti svih stanja sustava jednake nuli. Ovaj se sustav jednadžbi može skraćeno izraziti u vektorsko-matričnom obliku

$$\mathbf{PQ=0} \tag{7.5}$$

pri čemu je $\mathbf{P}$ n-komponentni vektor asimptotskih vjerojatnosti svih stanja sustava, $\mathbf{Q}$ je $n \times n$ matrica učestalosti prijelaza između stanja sustava, a $\mathbf{0}$ je n-komponentni vektor sa svim elementima jednakim nuli. U rješavanju ovog sustava od n linearnih algebarskih jednadžbi koristi se bilo kojih n-1 jednadžbi, a n-ta je jednadžba svojstvena jednadžba vjerojatnosti međusobno isključivih stanja sustava, odnosno

$$\sum_{1}^{n} P_i = 1 \tag{7.6}$$

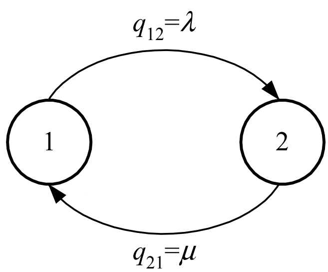
7.2 Raspoloživost jednokomponentnog sustava

Sustav koji ima samo dva stanja, od kojih je jedno radno a drugo kvarno, dakle sustav koji s funkcijskog stanovišta ima obilježja binarane komponente, naziva se **jednokomponentnim sustavom**.

Pretpostavi li se da se sustav u trenutku nastupa svakog kvara podvrgne obnavljanju bez odgode, a u trenutku nastupa svake obnove odmah ponovno uključi u djelovanje, te da je učestalost kvara konstantna i jednaka λ, a učestalost obnove također konstantna i jednaka μ, proces uzastopne izmjene radnog i kvarnog stanja sustava ima značajke Markovljeva procesa s dva stanja.

Neka stanju 1 tog procesa odgovara radno stanje, a stanju 2 tog procesa kvarno stanje sustava. Tada učestalost prijelaza između stanja 1 i stanja 2, q_{12}, odgovara učestalosti kvara λ sustava, a učestalost prijelaza između stanja 2 i stanja 1, q_{21}, odgovara učestalosti obnove μ sustava.

Dijagram stanja za određivanje raspoloživosti takvog sustava prikazan je na slici 7.1.



Slika 7.1. Dijagram stanja za određivanje raspoloživosti jednokomponentnog sustava

Polazeći od njezine definicije, trenutačna raspoloživost $A_s(t)$ promatranog sustava zapravo je jednaka vjerojatnosti stanja 1, odnosno $P_1(t)$ pripadnog Markovljevog procesa u trenutku isteka vremena t, proteklog od trenutka $t=0$, kad proces starta i nalazi se u stanju 1. Dakle,

$$A_S(t) \equiv P_1(t) \tag{7.7}$$

Za promatrani proces s dva stanja, vektor

$$\mathbf{P'}(\mathrm{t}) = (P_1'(t), P_2'(t)) \tag{7.8}$$

je **vektor derivacija vjerojatnosti stanja procesa**, vektor

$$\mathbf{P}(\mathrm{t}) = (P_1(t), P_2(t)) \tag{7.9}$$

je **vektor vjerojatnosti stanja procesa***,* a

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{bmatrix} \tag{7.10}$$

je **matrica učestalosti prijelaza između stanja procesa**.

Uzimajući u obzir činjenicu da je $q_{11} = -q_{12}$ a $q_{22} = -q_{21}$ te da je za promatrani slučaj $q_{12} = \lambda$ a $q_{21} = \mu$, matrica učestalosti prijelaza između stanja procesa jest

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{bmatrix} \tag{7.11}$$

Pripadni Kolmogorovljev sustav diferencijalnih jednadžbi može se tada iskazati u obliku

$$(P_1'(t), P_2'(t)) = (P_1(t), P_2(t)) \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{bmatrix} \tag{7.12}$$

odnosno

$$\begin{aligned} P_1'(t) + \lambda P_1(t) - \mu P_2(t) = 0 \\ P_2'(t) - \lambda P_1(t) + \mu P_2(t) = 0 \end{aligned} \tag{7.13}$$

Budući da se u nekom trenutku proces može nalaziti ili u stanju 1 ili u stanju 2, vjerojatnosti ovih stanja su komplementarne, odnosno za njih vrijedi

$$P_2(t) = 1 - P_1(t) \tag{7.14}$$

Ako se to uzme u obzir u prvoj diferencijalnoj jednadžbi, dobiva se

$$P_1^{'}(t) + (\lambda + \mu)P_1(t) - \mu = 0 \tag{7.15}$$

Rješavanjem ove diferencijalne jednadžbe primjenom Laplaceovih transformacija dobiva se

$$sP_1^*(s) - P_1(0) + (\lambda + \mu)P_1(s) - \frac{\mu}{s} = 0$$

Uzimajući u obzir da je $P_1(0) = 1$, dobiva se da je Laplaceova transformacija $P_1^*(s)$, određena izrazom

$$P_1^*(s) = \frac{s + \mu}{s(s + \lambda + \mu)} \tag{7.16}$$

Izraz za $P_1(t)$ dobije se inverznom Laplaceovom transformacijom izraza za $P_1^*(s)$. U tu se svrhu desna strana izraza (7.16) rastavlja na parcijalne razlomke općeg oblika

$$\frac{s + \mu}{s(s + \lambda + \mu)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + \lambda + \mu}$$

što će biti zadovoljeno ako je

$$A = \frac{\mu}{\lambda + \mu} \quad \text{i} \quad B = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$$

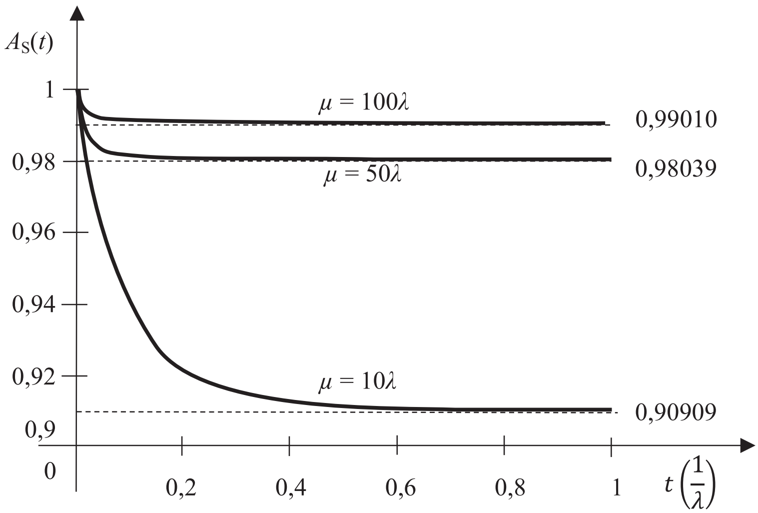
Uzimajući to u obzir, inverzna Laplaceova transformacija od $P_1^*(s)$ daje izraz za $P_1(t)$ oblika

$$P_1(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu)t}$$

što je ujedno i izraz za trenutačnu raspoloživost $A_S(t)$ promatranog jednokomponentnog sustava. Dakle,

$$A_S(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu)t} \tag{7.17}$$

Dijagramima na slici 7.2. prikazana je vremenska ovisnost raspoloživosti promatranog sustava za različite odnose učestalosti obnove prema učestalosti kvara sustava kao parametre.



Slika 7.2. Vremenski dijagram trenutačne raspoloživosti jednokomponentnog sustava

Uvrsti li se dobiveni izraz za trenutačnu raspoloživost sustava u opći izraz (7.1) za određivanje intervalne raspoloživosti, ta je raspoloživost za vremenski interval (t_1, t_2) $t_1 < t_2$ određena izrazom

$$\overline{A}_S(t_1, t_2) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{(\lambda + \mu)^2 (t_2 - t_1)} \left[e^{-(\lambda+\mu)\, t_1} - e^{-(\lambda+\mu)\, t_2} \right] \tag{7.18}$$

Nadalje, koristeći dobiveni izraz za trenutačnu raspoloživost u definicijskom izrazu (7.2) za asimptotsku raspoloživost, ta je raspoloživost određena izrazom

$$A_S = \frac{\mu}{\lambda + \mu} \tag{7.19}$$

Prema ranije spomenutom, asimptotska raspoloživost jednaka je asimptotskoj vjerojatnosti radnog stanja, odnosno stanja 1 sustava. Ta se vjerojatnost može dobiti iz sustava linearnih algebarskih jednadžbi proizašlih iz Kolmogorovljeva sustava diferencijalnih jednadžbi (7.13) kad su derivacije vjerojatnosti stanja jednake nuli, uz zamjenu druge jednadžbe jednadžbom $P_1 + P_2 = 1$ jer je zbroj asimptotskih vjerojatnosti radnog i kvarnog stanja jednak 1. Taj je sustav jednadžbi tada oblika

$$\begin{aligned} \lambda P_1 - \mu P_2 &= 0 \\ P_1 + P_2 &= 1 \end{aligned} \tag{7.20}$$

Rješenje je ovog sustava jednadžbi

$$P_1 = \frac{\mu}{\lambda + \mu}; \; P_2 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \tag{7.21}$$

Budući da je asimptotska raspoloživost sustava jednaka zbroju asimptotskih vjerojatnosti njegovih radnih stanja, a to je u ovom slučaju samo P_1, ta je raspoloživost identična izrazu (7.19).

Asimptotska raspoloživost promatranog jednokomponentnog sustava može se izraziti i pomoću srednjeg vremena do kvara i srednjeg vremena do obnove sustava jer iz izraza (7.19) proizlazi ekvivalentni izraz

$$A_S = \frac{\frac{1}{\lambda}}{\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu}}$$

iz kojeg neposredno slijedi da je

$$A_S = \frac{MTTF}{MTTF + MTTR} \tag{7.22}$$

pri čemu je $MTTF$ srednje vrijeme do kvara, a $MTTR$ srednje vrijeme do obnove promatranog jednokomponentnog sustava.

Primjer 7.1

Za jednokomponentni sustav s učestalošću kvara $\lambda = 2$ god^{-1} i učestalošću obnove $\mu = 10$ god^{-1} treba izračunati:

a) raspoloživost u trenutku isteka 6 mjeseci nakon uključenja tog sustava u djelovanje
b) asimptotsku raspoloživost.

Rješenje

$$\lambda = 2\,\text{god}^{-1}\ ;\ \mu = 10\,\text{god}^{-1}\ ;\ t = \frac{6}{12}\,\text{god} = \frac{1}{2}\,\text{god}$$

a) $$A_S(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)t}$$

$$A_S(\frac{1}{2}) = \frac{10}{2+10} + \frac{2}{2+10} e^{-(2+10)\cdot\frac{1}{2}} = 0{,}83374$$

b) $$A_S = A_S(\infty) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} = \frac{10}{2+10} = 0{,}83333$$

Primjer 7.2

Za jednokomponentni sustav učestalosti kvara $\lambda = 2$ god^{-1} i učestalosti obnove $\mu = 10$ god^{-1} treba izračunati srednju raspoloživost za razdoblje prvih 6 mjeseci nakon njegovog uključenja u djelovanje.

Rješenje

$$\lambda = 2\,\text{god}^{-1}\ ;\ \mu = 10\,\text{god}^{-1}\ ; t_1 = 0,\ t_2 = \frac{6}{12}\,\text{god} = \frac{1}{2}\,\text{god}$$

$$\overline{A}_S(t_1,t_2) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{(\lambda+\mu)^2(t_2-t_1)}\left[e^{-(\lambda+\mu)\ t_1} - e^{-(\lambda+\mu)\ t_2}\right]$$

$$\overline{A}_S(0,\frac{1}{2}) = \frac{10}{2+10} + \frac{2}{(2+10)^2(\frac{1}{2}-0)}\left[e^{-(2+10)\cdot 0} - e^{-(2+10)\cdot\frac{1}{2}}\right] = 0{,}86104$$

7.3 Raspoloživost dvokomponentnog sustava paralelne strukture

Neka se pretpostavi obnovljiv dvokomponentni sustav paralelne strukture, dakle obnovljiv dvokomponentni sustav s aktivnom zalihošću. Nadalje, neka komponente imaju konstantne i jednake učestalosti kvara λ i konstantne i jednake učestalosti obnove μ, što odgovara eksponencijalnoj razdiobi vjerojatnosti do kvara i eksponencijalnoj razdiobi vjerojatnosti do obnove komponenata. Zbog toga je za određivanje raspoloživosti takvog sustava prikladno kao matematičku osnovu koristiti Markovljev proces (Villemeur, 1992). U tu se svrhu najprije definiraju karakteristična stanja promatranog sustava, koja su ujedno i stanja Markovljevog procesa.

Karakteristična su sljedeća, međusobno isključiva, stanja sustava:

Stanje 1: Obje se komponente nalaze u radnom stanju.

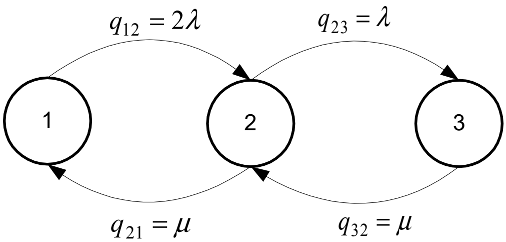
Stanje 2: Jedna se komponenta nalazi u radnom, a druga u kvarnom stanju i obnavlja se.

Stanje 3: Obje se komponente nalaze u kvarnom stanju i obnavljaju se.

Stanje 1 i stanje 2 radna su stanja sustava, a stanje 3 je kvarno. Učestalost prijelaza iz stanja 1 u stanje 2, q_{12}, jednaka je λ, učestalost prijelaza iz stanja 2 u stanje 3, q_{23}, jednaka je λ, a učestalost prijelaza iz stanja 2 u stanje 1, q_{21}, i stanja 3 u stanje 2, q_{32}, jednaka je μ. Učestalosti prijelaza između ostalih parova stanja sustava jednake su nuli. Pripadna je matrica učestalosti prijelaza oblika

$$\mathbf{Q}=\begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2\lambda & 2\lambda & 0 \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda \\ 0 & \mu & -\mu \end{bmatrix} \tag{7.23}$$

Dijagram stanja za određivanje trenutačne raspoloživosti promatranog sustava prikazan je na slici 7.3.



Slika 7.3. Dijagram stanja za određivanje raspoloživosti dvokomponentnog sustava paralelne strukture

Trenutačna raspoloživost $A_S(t)$ promatranog sustava određena je zbrojem vjerojatnosti njegovih radnih stanja u trenutku isteka vremena t, odnosno vjerojatnosti stanja 1, $P_1(t)$, i vjerojatnosti stanja 2, $P_2(t)$. Dakle,

$$A_S(t) = P_1(t) + P_2(t) \tag{7.24}$$

Međutim, kako je zbroj vjerojatnosti svih triju stanja jednak jedinici, odnosno

$$P_1(t) + P_2(t) + P_3(t) = 1$$

trenutačna je raspoloživost promatranog sustava određena općim izrazom

$$A_S(t) = 1 - P_3(t) \tag{7.25}$$

Pripadni Kolmogorovljev sustav diferencijalnih jednadžbi za promatrani sustav, iskazan u vektorsko-matričnom obliku, jest

$$(P_1^{'}(t), P_2^{'}(t), P_3^{'}) = (P_1(t), P_2(t), P_3(t)) \begin{bmatrix} -2\lambda & 2\lambda & 0 \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda \\ 0 & \mu & -\mu \end{bmatrix} \tag{7.26}$$

odnosno oblika

$$\begin{aligned} &P_1^{'}(t) + 2\lambda P_1(t) - \mu P_2(t) = 0 \\ &P_2^{'}(t) - 2\lambda P_1(t) + (\lambda+\mu) P_2(t) - \mu P_3(t) = 0 \\ &P_3^{'}(t) - \lambda P_2(t) + \mu P_3(t) = 0 \end{aligned} \tag{7.27}$$

Primjenom Laplaceovih transformacija na taj sustav diferencijalnih jednadžbi, uz početni uvjet $P_1(0) = 1,\ P_2(0) = P_3(0) = 0$, dobiva se sustav linearnih algebarskih jednadžbi s nepoznanicama $P_1^*(s), P_2^*(s)$ i $P_3^*(s)$, što su Laplaceovi transformati vjerojatnosti stanja $P_1(t),\ P_2(t)$ i $P_3(t)$. Ovaj je sustav jednadžbi oblika

$$\begin{aligned} &(s+2\lambda)P_1^*(s) - \mu P_2^*(s) = 1 \\ &-2\lambda P_1^*(s) + (s+\lambda+\mu)P_2^*(s) - \mu P_3^*(s) = 0 \\ &-\lambda P_2^*(s) + (s+\mu)P_3^*(s) = 0 \end{aligned} \tag{7.28}$$

Prema općem izrazu (7.25), za određivanje trenutačne raspoloživosti sustava dovoljno je odrediti izraz za $P_3(t)$ inverznom Laplaceovom transformacijom izraza za $P_3^*(s)$, koji se dobije rješavanjem sustava algebarskih jednadžbi (7.28). On je oblika

$$P_3^*(s) = \frac{2\lambda^2}{s\left[s^2 + (3\lambda+\mu)s + 2\lambda + 2\lambda\mu + \mu^2\right]} \tag{7.29}$$

Taj se izraz može iskazati u obliku

$$P_3^*(s) = \frac{2\lambda^2}{s(s-r_1)(s-r_2)} \tag{7.30}$$

pri čemu su r_1 i r_2 korijeni polinoma u zagradi nazivnika u izrazu (7.29). Oni su oblika

$$r_1 = \frac{-(3\lambda + 2\mu) + \sqrt{\lambda^2 + 4\lambda\mu}}{2} \tag{7.31a}$$

$$r_2 = \frac{-(3\lambda + 2\mu) - \sqrt{\lambda^2 + 4\lambda\mu}}{2} \tag{7.31b}$$

i za svako (pozitivno) λ i μ imaju negativne vrijednosti.

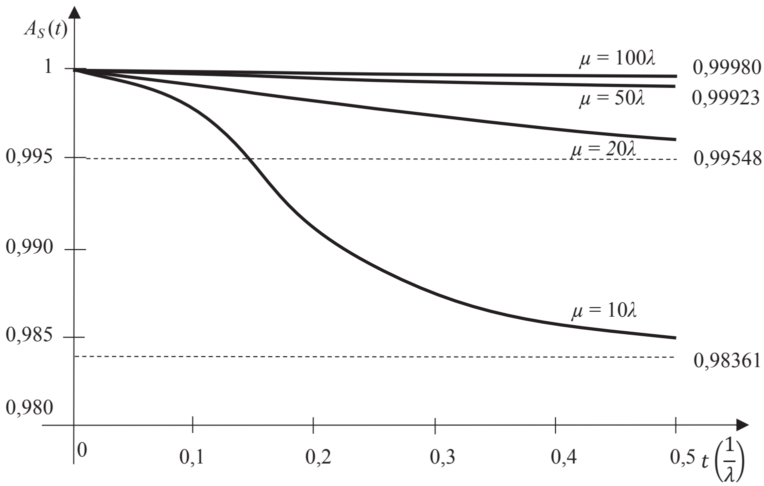
Inverzna Laplaceova transformacija izraza (7.30) daje izraz za $P_3(t)$. On je oblika

$$P_3(t) = \frac{2\lambda^2}{r_1 r_2} + \frac{2\lambda^2}{r_1(r_1 - r_2)} e^{r_1 t} - \frac{2\lambda^2}{r_2(r_1 - r_2)} e^{r_2 t} \tag{7.32}$$

Uvrštenjem ovog izraza u izraz (7.25) dobije se izraz za trenutačnu raspoloživost promatranog sustava. Dakle,

$$A_S(t) = \frac{\mu^2 + 2\lambda\mu}{2\lambda^2 + 2\lambda\mu + \mu^2} - \frac{2\lambda^2 (r_2 e^{r_1 t} - r_1 e^{r_2 t})}{r_1 r_2 (r_1 - r_2)} \tag{7.33}$$

Dijagramima na slici 7.4. prikazana je vremenska ovisnost trenutačne raspoloživosti promatranog sustava za različite odnose učestalosti obnove prema učestalosti kvara komponenata kao parametre.



Slika 7.4. Vremenski dijagrami raspoloživosti dvokomponentnog sustava paralelne strukture

Asimptotska raspoloživost A_S ovog sustava prema definiciji je jednaka graničnoj vrijednosti njegove trenutačne raspoloživosti ako vrijeme teži u beskonačnost. Prema tome, ova je raspoloživost određena izrazom

$$A_S = \frac{\mu^2 + 2\lambda\mu}{2\lambda^2 + 2\lambda\mu + \mu^2} \tag{7.34}$$

Asimptotska je raspoloživost, međutim, jednaka zbroju asimptotskih vjerojatnosti radnih stanja sustava, odnosno zbroju vjerojatnosti P_1 i P_2. Ove se vjerojatnosti mogu odrediti iz sustava algebarskih jednadžbi koji proizlazi iz sustava diferencijalnih jednadžbi (7.27) za $P_1^{'}(t) = P_2^{'}(t) = P_3^{'}(t) = 0$, pri čemu se umjesto treće jednadžbe koristi jednadžba $P_1 + P_2 + P_3 = 1$. Dakle,

$$\begin{aligned} &2\lambda P_1 - \mu P_2 = 0 \\ &-2\lambda P_1 + (\lambda + \mu)P_2 - \mu P_3 = 0 \\ &P_1 + P_2 + P_3 = 1 \end{aligned} \tag{7.35}$$

Iz ovog sustava jednadžbi dobiva se da je

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{\mu^2}{2\lambda^2 + 2\lambda\mu + \mu^2} \\ P_2 &= \frac{2\lambda\mu}{2\lambda^2 + 2\lambda\mu + \mu^2} \end{aligned} \tag{7.36}$$

a zbroj ovih dviju vjerojatnosti daje izraz (7.34), odnosno izraz za asimptotsku raspoloživost.

7.4 Raspoloživost idealnog dvokomponentnog sustava s rezervom

Neka se pretpostavi obnovljiv dvokomponentni sustav s rezervom, dakle obnovljv dvokomponentni sustav s pasivnom zalihošću čije komponente, kad su uključene u djelovanje, imaju konstantne i jednake učestalosti kvara λ i konstantne i jednake učestalosti obnove μ. Učestalost kvara komponente, kad se nalazi u rezervi, jednaka je nuli, a komponenta se sigurno uključuje u djelovanje u trenutku kvara komponente koja se nalazila u djelovanju (Villemeur, 1992).

Karakteristična su sljedeća, međusobno isključiva, stanja sustava:

Stanje 1: Primarna se komponenta nalazi u radnom stanju, a sekundarna je u rezervi.

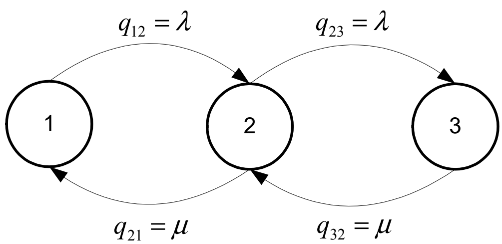
Stanje 2: Primarna se komponenata nalazi u kvarnom stanju i obnavlja se ili zamjenjuje ispravnom, a sekundarna se komponenta nalazi u radnom stanju.

Stanje 3: Obje se komponente nalaze u kvarnom stanju.

Stanje 1 i stanje 2 radna su stanja sustava, a stanje 3 je kvarno. Učestalost prijelaza iz stanja 1 u stanje 2, q_{12}, jednaka je λ, učestalost prijelaza iz stanja 2 u stanje 3, q_{23}, jednaka je λ, a učestalost prijelaza iz stanja 2 u stanje 1, q_{21}, i stanja 3 u stanje 2, q_{32}, jednaka je μ. Učestalosti prijelaza između ostalih parova stanja sustava jednake su nuli. Matrica je učestalosti prijelaza između stanja promatranog sustava oblika

$$\mathbf{Q}=\begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda \\ 0 & \mu & -\mu \end{bmatrix} \tag{7.37}$$

Dijagram stanja za određivanje raspoloživosti promatranog sustava prikazan je na slici 7.5.



Slika 7.5. Dijagram stanja za određivanje raspoloživosti idealnog dvokomponentnog sustava s rezervom

Trenutačna raspoloživost $A_S(t)$ promatranog sustava određena je zbrojem vjerojatnosti njegovih radnih stanja u trenutku isteka vremena t, odnosno vjerojatnosti stanja 1, $P_1(t)$, i vjerojatnosti stanja 2, $P_2(t)$, ili izrazom (7.25). Pripadni Kolmogorovljev sustav diferencijalnih jednadžbi promatranog sustava, iskazan u vektorsko-matričnom obliku, jest

$$(P_1'(t), P_2'(t), P_3') = (P_1(t), P_2(t), P_3(t)) \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda \\ 0 & \mu & -\mu \end{bmatrix} \tag{7.38}$$

odnosno oblika

$$\begin{aligned} &P_1'(t) + \lambda P_1(t) - \mu P_2(t) = 0 \\ &P_2'(t) - \lambda P_1(t) + (\lambda+\mu) P_2(t) - \mu P_3(t) = 0 \\ &P_3'(t) - \lambda P_2(t) + \mu P_3(t) = 0 \end{aligned} \tag{7.39}$$

Rješavanjem ovog sustava linearnih diferencijalnih jednadžbi primjenom Laplaceovih transformacija, uz početni uvjet $P_1(0) = 1, P_2(0) = P_3(0) = 0$, dobiva se sustav linearnih algebarskih jednadžbi oblika

$$\begin{aligned} &(s+\lambda) P_1^*(s) - \mu P_2^*(s) = 1 \\ &-\lambda P_1^*(s) + (s+\lambda+\mu) P_2^*(s) - \mu P_3^*(s) = 0 \\ &-\lambda P_2^*(s) + (s+\mu) P_3^*(s) = 0 \end{aligned} \tag{7.40}$$

Rješavanjem ovog sustava linearnih jednadžbi dobiva se izraz za $P_3^*(s)$. On je oblika

$$P_3^*(s) = \frac{\lambda^2}{s\left[s^2 + 2(\lambda+\mu)s + \lambda^2 + \lambda\mu + \mu^2\right]} \tag{7.41}$$

Taj se izraz može iskazati u obliku

$$P_3^*(s) = \frac{\lambda^2}{s(s-r_1)(s-r_2)} \tag{7.42}$$

pri čemu su r_1 i r_2 korijeni polinoma u zagradi nazivnika izraza (7.41). Oni su oblika

$$r_1 = -(\lambda+\mu) + \sqrt{\lambda\mu} \tag{7.43a}$$

$$r_2 = -(\lambda+\mu) - \sqrt{\lambda\mu} \tag{7.43b}$$

i za svako (pozitivno) λ i μ imaju negativne vrijednosti.

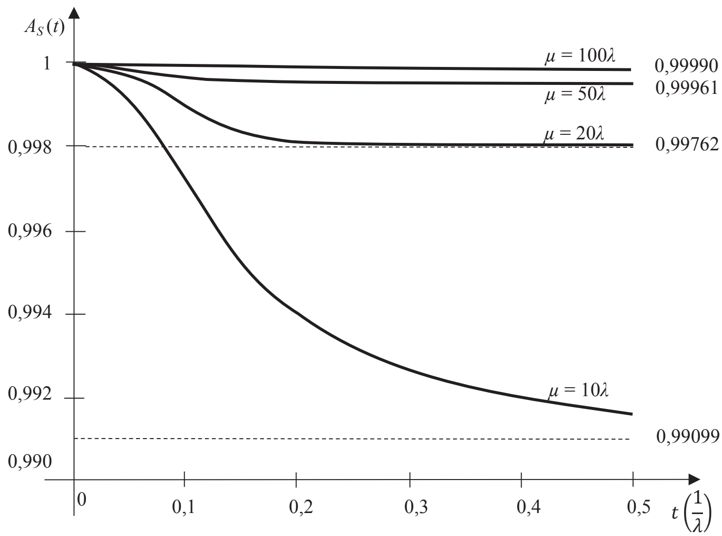
Inverzna Laplaceova transformacija izraza (7.42) daje izraz za $P_3(t)$. On je oblika

$$P_3(t) = \frac{\lambda^2}{r_1 r_2} + \frac{\lambda^2}{r_1(r_1 - r_2)} e^{r_1 t} - \frac{\lambda^2}{r_2(r_1 - r_2)} e^{r_2 t} \tag{7.44}$$

Uvrštenjem ovog izraza u izraz (7.25) dobije se izraz za trenutačnu raspoloživost promatranog sustava. Dakle,

$$A_S(t) = \frac{\mu^2 + \lambda\mu}{\lambda^2 + \lambda\mu + \mu^2} - \frac{\lambda^2 (r_2 e^{r_1 t} - r_1 e^{r_2 t})}{r_1 r_2 (r_1 - r_2)} \tag{7.45}$$

Dijagramima na slici 7.6. prikazana je vremenska ovisnost trenutačne raspoloživosti promatranog sustava uz različite odnose učestalosti obnove prema učestalosti kvara komponenata kao parametre.



Slika 7.6. Vremenski dijagrami raspoloživosti idealnog dvokomponentnog sustava s rezervom

Asimptotska raspoloživost A_S ovog sustava prema definiciji je jednaka graničnoj vrijednosti njegove trenutačne raspoloživosti ako vrijeme teži u beskonačnost. Ako se to primijeni na izraz (7.45), ta je raspoloživost određena izrazom

$$A_S = \frac{\mu^2 + \lambda\mu}{\lambda^2 + \lambda\mu + \mu^2} \tag{7.46}$$

Asimptotska raspoloživost također je jednaka zbroju asimptotskih vjerojatnosti radnih stanja sustava, odnosno zbroju vjerojatnosti P_1 i P_2. Te se vjerojatnosti mogu odrediti iz sustava algebarskih jednadžbi koji proizlazi iz sustava diferencijalnih jednadžbi (7.39) za $P_1'(t) = P_2'(t) = P_3'(t) = 0$, pri čemu se umjesto treće jednadžbe uzima jednadžba $P_1 + P_2 + P_3 = 1$. Dakle,

$$\begin{aligned} &\lambda P_1 - \mu P_2 = 0 \\ &-\lambda P_1 + (\lambda + \mu) P_2 - \mu P_3 = 0 \\ &P_1 + P_2 + P_3 = 1 \end{aligned} \tag{7.47}$$

Iz ovog sustava jednadžbi dobiva se da je

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{\mu^2}{\lambda^2 + \lambda\mu + \mu^2} \\ P_2 &= \frac{\lambda\mu}{\lambda^2 + \lambda\mu + \mu^2} \end{aligned} \tag{7.48}$$

a zbroj ovih dviju vjerojatnosti daje izraz (7.46), odnosno izraz za asimptotsku raspoloživost.

Dodatak A

OSNOVE TEORIJE VJEROJATNOSTI I SLUČAJNIH PROCESA

A1 Događaji

A1.1 Pojam događaja

Matematičko modeliranje mnogih fizikalnih i drugih veličina i pojava temelji se na **podacima** dobivenih mjerenjem ili opažanjem njihovih karakterističnih obilježja.

Pokus je aktivnost kojom se obavljaju mjerenja ili opažanja karakterističnih obilježja neke veličine ili pojave. Svako ponovljeno mjerenje ili opažanje naziva se **pokušajem**, a rezultat je svakog pokušaja **ishod pokusa***.* Ako je ishod svakog pokusa neizvjestan, radi se o **slučajnom pokusu***.* Svaki mogući ishod slučajnog pokusa predstavlja **elementarni događaj***,* obično označen s ω, a skup svih mogućih ishoda slučajnog pokusa tvori **prostor elementarnih događaja**, obično označen s Ω.

Definirani podskupovi elementarnih događaja prostora elementarnih događaja Ω nazivaju se **događajima**, obično označenim s A, B, ... (Trivedi, 1982).

A1.2 Unija, presjek i komplement događaja

Iz događaja A, B, ... , koji predstavljaju određene podskupove elementarnih događaja prostora Ω, mogu se izvesti i drugi događaji u prostoru Ω.

Unija događaja A i B, označena s $A \cup B$, događaj je koji se ostvaruje nastupom onih elementarnih događaja prostora Ω kojima se ostvaruje događaj A ili događaj B ili oba ova događaja.

Presjek događaja A i B, označen s $A \cap B$, događaj je koji se ostvaruje nastupom samo onih elementarnih događaja prostora Ω kojima se ostvaruje i događaj A i događaj B.

Ako događaji A i B nemaju nijedan zajednički elementarni događaj, ta su dva događaja **međusobno isključiva***.* Za takve je događaje $A \cap B$ = Ø, pri čemu je s Ø označen **prazan skup**, odnosno skup bez ijednog elementarnog događaja.

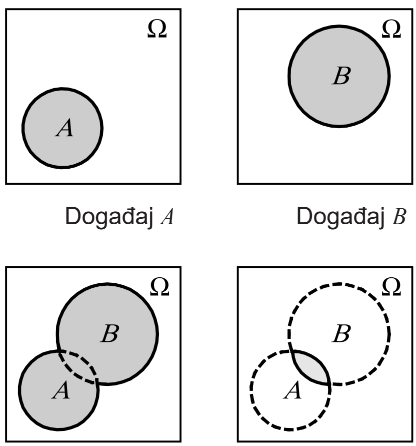
Komplement događaja A, označen s A^c, događaj je koji se ostvaruje nastupom svih elementarnih događaja prostora Ω kojima se ne ostvaruje događaj A.

Budući da su događaj A i njegov komplement A^c uvijek međusobno isključivi događaji, njihov je međusobni presjek prazan skup, a njihova međusobna unija prostor Ω. Dakle,

$$A \cap A^c = \emptyset$$

$$A \cup A^c = \Omega$$

Vennovi dijagrami daju grafičku predodžbu događaja u prostoru Ω. Na Slici A.1 prikazani su Vennovi dijagrami za događaje A, B, $A \cup B$ i $A \cap B$ u prostoru Ω.



Događaj A Događaj B

Događaj $A \cup B$ Događaj $A \cap B$

Slika A.1. Vennovi dijagrami za događaje A, B, $A \cup B$ i $A \cap B$ u prostoru Ω.

A2 Vjerojatnost događaja

A2.1 Pojam vjerojatnosti događaja

Ako prostor Ω tvore diskretni elementarni događaji, određeni su podskupovi tog prostora događaji. Prema Trivedi (1982), pridruži li se nekom događaju A realni broj $P\{A\}$, $P\{A\}$ je **vjerojatnost događaja** A ako su zadovoljena sljedeća tri **aksioma vjerojatnosti**:

Aksiom 1: Za neki događaj A u prostoru Ω vrijedi

$$P(A) \geq 0$$

Aksiom 2: Za događaj Ω, odnosno **sigurni događaj,** vrijedi

$$P(\Omega) = 1$$

Aksiom 3: Za međusobno isključive događaje $A_1, A_2, \ldots$ vrijedi

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_1) + \ldots$$

Ta tri aksioma vjerojatnosti omogućavaju izgradnju **teorije vjerojatnosti**. Pritom vrijede određeni **teoremi vjerojatnosti,** od kojih su značajniji:

- Za neki događaj A u prostoru Ω vrijedi

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

- Za događaj Ø, odnosno **nemoguć događaj**, vrijedi

$$P(\varnothing) = 0$$

- Za događaj A^c, odnosno komplement događaja A u prostoru Ω, vrijedi

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

- Za uniju od n međusobno isključivih događaja $A_1, A_2, \ldots, A_n$, u prostoru Ω, vrijedi

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$$

- Za proizvoljne događaje A i B u prostoru Ω, vrijedi

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

A2.2 Uvjetna vjerojatnost događaja

Ako je vjerojatnost nastupa događaja B uvjetovana nastupom događaja A, kaže se da se radi o **uvjetnoj vjerojatnosti od** B **za dani** A, koja se označava s $P(B|A)$ (Trivedi, 1982). Ako je $P(A) > 0$, za tu vjerojatnost vrijedi

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Analogno tome, ako je $P(B) > 0$, za uvjetnu vjerojatnost od A za dani B vrijedi

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Iz prethodnih dviju uvjetnih vjerojatnosti proizlazi da je

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B)$$

A2.3 Vjerojatnost neovisnih događaja

Neka su događaji A i B takvi da je

$$P(B|A) = P(B) \quad \text{i} \quad P(A|B) = P(A)$$

To znači da vjerojatnost nastupa događaja B ne ovisi o nastupu ili nenastupu događaja A i obratno, odnosno da su A i B **međusobno neovisni događaji**. Za takve događaje vrijedi

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Prema tome, za međusobno neovisne događaje A i B vjerojatnost njihovog međusobnog presjeka jednaka je umnošku njihovih vjerojatnosti.

Ako su događaji A i B međusobno neovisni, za vjerojatnost njihove unije vrijedi

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B)$$

A2.4 Totalna vjerojatnost događaja

Neka su $A_1, A_2, \ldots$ međusobno isključivi događaji ($A_i \cap A_j = \emptyset$ za sve $i \neq j$), $\Omega = A_1 \cup A_2 \cup \ldots$, i $P(A_i) > 0$, $i = 1, 2, \ldots$.

Za neki događaj B koji je

$B = B \cap \Omega = B \cap (A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \ldots$, pri čemu su događaji $B \cap A_1, B \cap A_2, \ldots$ također međusobno isključivi, iz uporabe Aksioma 3 i pravila za uvjetnu vjerojatnost od B za dano $A_1, A_2, \ldots$ proizlazi da je

$$P(B) = \sum_i P(B \cap A_i) = \sum_i P(A_i) P(B|A_i)$$

što je **totalna vjerojatnost događaja** B.

A3 Slučajne varijable

A3.1 Pojam i osnovna obilježja slučajnih varijabli

Za neki prostor elementarnih događaja Ω, **slučajna varijabla**, obično označena s X, funkcija je koja svakom elementarnom događaju prostora Ω pridružuje neki realni broj. Slučajna varijabla koja poprima prebrojivo mnogo mogućih vrijednosti naziva se **diskretnom slučajnom varijablom**. Ako tih vrijednosti ima neprebrojivo mnogo, radi se o **kontinuiranoj slučajnoj varijabli**.

Funkcijom razdiobe vjerojatnosti slučajne varijable X, obično označenom s $F(x)$, u potpunosti su određena svojstva slučajne varijable X. Ovom je funkcijom definirana vjerojatnost da slučajna varijabla X poprimi vrijednost manju ili najviše jednaku proizvoljno odabranoj vrijednosti X. Dakle,

$$F(x) = P(X \leq x)$$

Osnovna su svojstva ove funkcije:

(1) $0 \leq F(x) \leq 1$

(2) $\lim_{x \to \infty} F(x) = 0$; $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$

(3) $F(x)$ je neopadajuća s rastućom vrijednošću X

Često je od interesa poznavanje samo nekih integralnih pokazatelja razdiobe slučajne varijable X. Najznačajniji su **matematičko očekivanje**, obično označeno s $E[X]$, i **disperzija**, obično označena s $D[X]$, kao i vrijednost njezinog drugog korijena, nazvana **standardnom devijacijom**, obično označena s σ_X .

A3.2 Diskretna slučajna varijabla

A3.2.1 Pojam i osnovna obilježja diskretne slučajne varijable

Diskretna slučajna varijabla X definirana je ako je poznata vjerojatnost p_i svake njezine moguće vrijednosti x_i, pri čemu je $i = 1, 2, \ldots$. Dakle,

$$p_i = P(X = x_i)$$

Ako diskretna slučajna varijabla X može poprimiti samo konačan broj mogućih vrijednosti, zbroj je vjerojatnosti p_i svih mogućih vrijednosti x_i te varijable jednak jedinici. Dakle,

$$\sum_i p_i = 1$$

Polazeći od opće definicije, funkcija razdiobe vjerojatnosti $F(x)$ diskretne slučajne varijable X dana je izrazom

$$F(x) = \sum_{x_i < x} p_i$$

Matematičko očekivanje $E[X]$ određeno je općim izrazom

$$E[X] = \sum_i x_i p_i$$

a disperzija $D[X]$ izrazom

$$D[X] = \sum_i [x_i - E[X]]^2 p_i$$

A3.2.2 Binomna razdioba diskretne slučajne varijable

Diskretna slučajna varijabla X ima **binomnu razdiobu** s parametrima n i p ako je vjerojatnost p_x broja izvedenih pokusa x s relevantnim ishodima, od ukupno n izvedenih pokusa, određena izrazom

$$p_x = P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

pri čemu je p vjerojatnost nastupa relevantnog ishoda pri izvođenju sva kog pokusa, a

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

Pripadna je funkcija razdiobe vjerojatnosti $F(x)$ oblika

$$F(x) = \sum_{i=0}^{x} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

Matematičko je očekivanje $E[X]$ ove razdiobe

$$E[X] = np$$

a njezina disperzija $D[X]$

$$D[X] = np(1-p)$$

A3.3 Kontinuirana slučajna varijabla

A3.3.1 Pojam i opća obilježja kontinuirane slučajne varijable

Kontinuirana slučajna varijabla X obilježena je funkcijom razdiobe vjerojatnosti $F(x)$ općeg oblika

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$$

pri čemu se podintegralna funkcija $f(x)$, koja je zapravo derivacija funkcije razdiobe vjerojatnosti $F(x)$, naziva **funkcijom gustoće vjerojatnosti**.

Osnovna su svojstva ove funkcije:

(1) $f(x) \geq 0$ za $-\infty < x < \infty$

(2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

Matematičko je očekivanje $E[X]$ kontinuirane slučajne varijable

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

a njezina disperzija $D[X]$

$$D[X] = \int_{-\infty}^{\infty} [x - E(X)]^2 f(x) dx$$

Vjerojatnost da slučajna varijabla X poprimi vrijednosti unutar intervala (a,b), odnosno $P(a < X \leq b)$, jest

$$\begin{aligned} P(a < X \leq b) &= P(X \leq b) - P(X \leq a) \\ &= F(b) - F(a) \\ &= \int_a^b f(x) dx \end{aligned}$$

A3.3.2 Eksponencijalna razdioba kontinuirane slučajne varijable

Kontinuirana slučajna varijabla X ima **eksponencijalnu razdiobu s parametrom** q, $q > 0$, ako je njezina funkcija gustoće vjerojatnosti $f(x)$ oblika

$$f(x) = qe^{-qx} \quad ; \quad x \geq 0$$

Pripadna je funkcija razdiobe vjerojatnosti $F(x)$ oblika

$$F(x) = 1 - e^{-qx} \quad ; \quad x \geq 0$$

Matematičko je očekivanje $E[X]$ ove razdiobe

$$E[X] = \frac{1}{q}$$

a njezina disperzija $D[X]$ je

$$D[X] = \frac{1}{q^2}$$

Posebno svojstvo slučajnih varijabli s eksponencijalnom razdiobom predstavlja njihovo svojstvo takozvanog „nepamćenja“ jer za ovu razdiobu vrijedi

$$P(X > x+u | X > x) = P(X > u) \quad \text{za} \quad x,u \geq 0$$

Drugim riječima, ako već poprimi vrijednost veću od x, vjerojatnost da slučajna varijabla X poprimi vrijednost veću i od $x+u$ jednaka je vjerojatnosti da poprimi vrijednost samo veću od u. Ovo se jednostavno dokazuje jer je, s jedne strane,

$$P(X > u) = 1 - P(X \leq u) = 1 - (1 - e^{-qu}) = e^{-qu}$$

a s druge strane,

$$P(X > x+u | X > x) = \frac{P(X > x+u)}{P(X > x)} = \frac{1 - P(X \leq x+u)}{1 - P(X \leq x)} =$$

$$= \frac{1-(1-e^{-q(x+u)})}{1-(1-e^{-qx})} = e^{-qu}$$

Dakle, rezultat je isti, čime je svojstvo „nepamćenja“ dokazano.

A4 Slučajni procesi

A4.1 Pojam slučajnog procesa

Prema Ross (1983), **slučajni proces**, obično označen s $\{X(t), t \in T\}$, skup je slučajnih varijabli, pri čemu je za svako t iz skupa T, $X(t)$ slučajna varijabla. Ako t predstavlja vrijeme, $X(t)$ predstavlja **stanje slučajnog procesa** u trenutku isteka vremena t, računajući od početnog trenutka $t = 0$.

Ako su promjene stanja slučajnog procesa moguće u bilo kojem trenutku tijekom vremena, radi se o **vremenski kontinuiranom slučajnom procesu**. Takav proces ima **neovisne priraste** ako je broj promjena stanja procesa tijekom odvojenih razdoblja međusobno neovisan. Slučajni proces ima **stacionarne priraste** ako je razdioba broja promjena stanja procesa tijekom bilo kojeg razdoblja ovisna samo o trajanju tog razdoblja.

A4.2 Homogen Markovljev proces

A4.2.1 Pojam homogenog Markovljevog procesa

Slučajni je proces $\{X(t), t \geq 0\}$ **Markovljev proces** ako za sva vremena $s, t \geq 0$ i nenegativne cijele brojeve $i, j, x(u)$, pri čemu je $0 \leq u \leq s,$ vrijedi

$$P\{X(s+t) = j \mid X(s) = i; X(u) = x(u)\} = P\{X(s+t) = j \mid X(s) = i\}$$

Drugim riječima, Markovljev proces slučajni je proces koji ima svojstvo da uvjetna razdioba vjerojatnosti stanja procesa u trenutku $(s+t)$ za dano sadašnje stanje procesa u trenutku s i sva prošla stanja ovisi samo o sadašnjem stanju. Pritom, ako $P\{X(s+t) = j \mid X(s) = i\}$ ovisi samo o t a ne i o s, Markovljev proces ima stacionarne ili homogene vjerojatnosti prijelaza. U tom se slučaju radi o **homogenom Markovljevom procesu.**

A4.2.2 Vjerojatnosti prijelaza između stanja procesa

Neka se pretpostavi homogen Markovljev proces s n mogućih stanja. **Vjerojatnost prijelaza procesa** iz (nekog njegovog) i-tog u (neko njegovo) j-to stanje, označena s $p_{ij}(t)$ tijekom vremena t, definirana je vjerojatnošću da se taj proces, koji se u trenutku $t = 0$ nalazi u i-tom stanju, nađe u j-tom stanju u trenutku isteka vremena t proteklog od trenutka $t = 0$. Dakle,

$$P_{ij}(t) = P(X(t) = j \mid X(0) = i)$$

Osnovna su svojstva $P_{ij}(t)$:

(1) $P_{j}(t) \geq 0$ za $t \geq 0$ i sve i, j = 1, 2, ... , n

(2) $\sum_{j=1}^{n} P_{ij}(t) = 1$ za $t \geq 0$ i svako i = 1, 2, ... , n

(3) $P_{ii}(t) = 1 - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} P_{j}(t)$ za $t \geq 0$ i svako i = 1, 2, ... , n

A4.2.3 Učestalosti prijelaza između stanja procesa

Neka se pretpostavi homogen Markovljev proces s n mogućih stanja. **Učestalost prijelaza procesa** iz (nekog njegovog) i-tog u (neko njegovo) j-to stanje u trenutku t, označeno s $q_{ij}(t)$, definirana je graničnom vrijednošću omjera vjerojatnosti da se proces koji se u trenutku t nalazi u i-tom stanju nađe u j-tom stanju u trenutku t + Δt i vremena Δt ako ono teži k nuli. Dakle,

$$q_{ij}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(X(t+\Delta t) = j | X(t) = i)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_{ij}(t, t+\Delta t)}{\Delta t}$$

Ako je proces homogen, $P_{ij}(t, t+\Delta t)$ ne ovisi o t, već samo o Δt, iz čega proizlazi

$$q_{ij}(t) = q_{ij} = konst.$$

Osnovna su svojstva q_{ij}:

(1) $q_{ij} \geq 0$ za svako $j \neq i$

(2) $\sum_{j=1}^{n} q_{ij} = 0$ za svako i = 1, 2, … , n

(3) $q_{ii} = -\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} q_{ij}$ za svako i = 1, 2, … , n

A4.2.4 Trenutačne vjerojatnosti stanja procesa

Vjerojatnosti nekog j-tog stanja homogenog Markovljevog procesa u trenutku isteka vremena t proteklog od trenutka $t = 0$, odnosno vjerojatnost označena s $P_j(t)$, predstavlja **trenutačnu vjerojatnost *j*-tog stanja procesa.** Prema Ross (1983), uz poznate učestalosti prijelaza između svih stanja procesa i tog j-tog stanja, vrijedi **Kolmogorovljeva diferencijalna jednadžba** oblika

$$P_j^{'}(t) = \sum_{i=1}^{n} q_{ij} P_i(t)$$

Ako su poznate početne vjerojatnosti svih stanja procesa, odnosno $P_i(0), i = 1, 2, ..., n,$ odnosno ako je poznat redni **vektor početnih vjerojatnosti stanja procesa** oblika

$$\mathbf{P}(0)=(P_1(0),P_2(0),\cdots,P_n(0))$$

vjerojatnosti su stanja procesa u trenutku isteka vremena t proteklog od trenutka $t=0$, odnosno vjerojatnosti $P_j(t), j=1,2,...,n,$ rješenja **Kolmogorovljeva sustava diferencijalnih jednadžbi** oblika:

$$\begin{aligned}
P_1'(t) &= P_1(t)q_{11} + P_2(t)q_{21} + \cdots + P_n(t)q_{n1} \\
P_2'(t) &= P_1(t)q_{12} + P_2(t)q_{22} + \cdots + P_n(t)q_{n2} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
P_n'(t) &= P_1(t)q_{1n} + P_2(t)q_{2n} + \cdots + P_n(t)q_{nn}
\end{aligned}$$

ili u skraćenom vektorsko-matričnom obliku:

$$\mathbf{P}'(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{Q}$$

Pritom je s $\mathbf{P}'(t)$ označen **redni vektor derivacija vjerojatnosti stanja procesa** oblika

$$\mathbf{P}'(t) = (P_1'(t), P_2'(t), \cdots, P_n'(t))$$

s $\mathbf{P}(t)$ **redni vektor vjerojatnosti stanja procesa** oblika

$$\mathbf{P}(t) = (P_1(t), P_2(t), \cdots, P_n(t)),$$

a s $\mathbf{Q}$ **kvadratna matrica učestalosti prijelaza između stanja procesa** oblika

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_{nn} \end{bmatrix}$$

Primjer A1

Neka se pretpostavi homogen Markovljev proces s dva moguća stanja, označena s 1 i 2. Nadalje, neka se pretpostavi da su poznate učestalosti prijelaza između stanja procesa, odnosno q_{12} i q_{21}, te da se u trenutku t=0 taj proces nalazi u stanju 1. Treba odrediti vjerojatnost stanja 1 i stanja 2 tog procesa u trenutku isteka t jedinica vremena nakon toga.

Rješenje

Vjerojatnosti stanja promatranog procesa u trenutku t, odnosno $P_1(t)$ i $P_2(t)$, rješenja su Kolmogorovljeva sustava diferencijalnih jednadžbi, skraćeno prikazanog u obliku

$$(P_1'(t), P_2'(t)) = (P_1(t), P_2(t))\begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{bmatrix}$$

iz čega proizlazi da je

$$P_1'(t) = q_{11}P_1(t) + q_{21}P_2(t)$$
$$P_2'(t) = q_{12}P_1(t) + q_{22}P_2(t)$$

Budući da proces ima samo dva stanja, iz čega proizlazi da je $P_2(t) = 1 - P_1(t)$ odnosno $q_{11} = -q_{12}$, diferencijalna jednadžba za određivanje $P_1(t)$ poprima oblik

$$P_1'(t) + (q_{12} + q_{21})P_1(t) = q_{21}$$

Pomnoži li se ova jednadžba s $e^{(q_{12}+q_{21})t}$ dobiva se

$$e^{(q_{12}+q_{21})t}\,[P_1'(t) + (q_{12} + q_{21})P_1(t)] = q_{21}\,e^{(q_{12}+q_{21})t}$$

Budući da je lijeva strana ove jednadžbe zapravo derivacija izraza

$$P_1(t)\,e^{(q_{12}+q_{21})t}$$

proizlazi da je

$$\frac{d}{dt}\left[e^{(q_{12}+q_{21})t}P_1(t)\right] = q_{21}\,e^{(q_{12}+q_{21})t}$$

Integrira li se ova jednadžba po vremenu t, dobiva se

$$e^{(q_{12}+q_{21})t}\,P_1(t) = \frac{q_{21}}{q_{12}+q_{21}}\,e^{(q_{12}+q_{21})t} + C$$

Za $t=0$, pri čemu je $P_1(0) = 1$, konstanta je integracije

$$C = \frac{q_{12}}{q_{12}+q_{21}}$$

Uvrštenjem te konstante u gornju jednadžbu i njezinim dijeljenjem s $e^{(q_{12}+q_{21})t}$ dobiva se da je $P_1(t)$ određena izrazom

$$P_1(t) = \frac{q_{21}}{q_{12}+q_{21}} + \frac{q_{12}}{q_{12}+q_{21}}\,e^{-(q_{12}+q_{21})t}$$

iz čega proizlazi da je, zbog $P_2(t) = 1 - P_1(t)$, izraz za $P_2(t)$ oblika

$$P_2(t) = \frac{q_{12}}{q_{12} + q_{21}} - \frac{q_{12}}{q_{12} + q_{21}} e^{-(q_{12}+q_{21})t}$$

A4.2.5 Asimptotske vjerojatnosti stanja procesa

Nerijetko je od interesa određivanje samo vjerojatnosti stanja homogenog Markovljevog procesa kad vrijeme teži u beskonačnost, odnosno određivanje **asimptotskih vjerojatnosti stanja procesa**. Za te vjerojatnosti stanja vrijedi

$$\lim_{t \to \infty} P_j(t) = P_j = konst. \text{ za } j = 1,2,...,n$$

i one ne ovise o početnom stanju procesa.

Budući da su asimptotske vjerojatnosti stanja procesa konstantne, vrijedi

$$\lim_{t \to \infty} P_j^{'}(t) = 0 \text{ za } j = 1,2,...,n$$

odnosno derivacije vjerojatnosti stanja Markovljevog procesa ako vrijeme t teži u beskonačnost jednake su nuli.

Asimptotske vjerojatnosti stanja homogenog Markovljevog procesa rješenja su sustava linearnih algebarskih jednadžbi proizašlih iz pripadnog sustava Kolmogorovljevih diferencijalnih jednadžbi u kojima se pretpostavlja da su derivacije vjerojatnosti svih stanja procesa jednake nuli. Proizašli sustav linearnih algebarskih jednadžbi može se skraćeno izraziti u obliku

$$\mathbf{P}(t)\mathbf{Q} = \mathbf{0}$$

pri čemu je s $\mathbf{0}$ označen n-komponentni redni vektor s elementima jednakim nuli.

Primjer A2

Treba odrediti asimptotske vjerojatnosti stanja Markovljeva procesa iz primjera *A1*.

Rješenje

Asimptotske vjerojatnosti stanja 1 i stanja 2, označene s P_1 i P_2, određene su graničnim vrijednostima trenutačnih vjerojatnosti ovih stanja, označenim s $P_1(t)$ i $P_2(t)$, dobivenih u primjeru *A1***,** ako vrijeme t teži u beskonačnost. Dakle,

$$P_1 = \lim_{t\to\infty} P_1(t) = \frac{q_{21}}{q_{12}+q_{21}}$$

$$P_2 = \lim_{t\to\infty} P_2(t) = \frac{q_{12}}{q_{12}+q_{21}}$$

Ove se vjerojatnosti mogu, međutim, dobiti iz sustava algebarskih jednadžbi izvedenog iz Kolmogorovljevog sustava diferencijalnih jednadžbi za određivanje vjerojatnosti $P_1(t)$ i $P_2(t)$, izloženog u primjeru *A1***,** ako se u tim jednadžbama pretpostavi da su derivacije ovih (vremenski ovisnih) vjerojatnosti jednake nuli, uzimajući u obzir da je njihov zbroj jednak jedinici. Dakle,

$$q_{11}P_1 - q_{21}P_2 = 0$$
$$P_1 + P_2 = 1$$

Uzme li se u obzir još i činjenica da je $q_{11} = -q_{12}$, dobiva se da je

$$P_1 = \frac{q_{21}}{q_{12}+q_{21}}$$

$$P_2 = \frac{q_{12}}{q_{12}+q_{21}}$$

što je identično prethodno dobivenom rezultatu.

A4.2.6 Apsorbirajuća stanja procesa

Ako homogeni Markovljev proces sadrži stanje koje, kad ga poprimi, ne može napustiti sve dok se sustav ne vrati u početno stanje, takvo se stanje naziva **apsorbirajućim stanjem procesa**. Dakle, učestalost prijelaza homogenog Markovljevog procesa iz apsorbirajućeg u bilo koje drugo stanje jednako je nuli. Za neko i-to apsorbirajuće stanje tada vrijedi

$$q_{ij} = 0 \text{ za svako } j = 1,2,\ldots,n;\ j \neq i$$

Dodatak B

OSNOVE LAPLACEOVIH TRANSFORMACIJA

Neka je $f(x)$ neka funkcija realnog argumenta x, definirana za $x > 0$ s vrijednostima na skupu realnih ili kompleksnih brojeva. Nadalje, neka je s realni ili kompleksni parametar. Tada je **Laplaceov transformat** funkcije $f(x)$ funkcija, označena s $F(s)$, definiran s

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x)dx$$

za svaki s za koji ovaj nepravi integral konvergira.

Prema Elezović (2010), pridruživanje $f(x) \mapsto F(s)$ naziva se **Laplaceovom transformacijom** funkcije $f(x)$ i označava s $L\{f(x)\}$. Obrnuto pridruživanje, odnosno pridruživanje $F(s) \mapsto f(x)$ naziva se **inverznom Laplaceovom transformacijom** funkcije $F(s)$ i označava s $L^{-1}\{F(s)\}$. Funkcija $f(x)$ obično se naziva **originalom** ili **gornjom funkcijom**, a njezin Laplaceov transformat $F(s)$ **slikom** ili **donjom funkcijom**.

Uobičajeni je način obratnog pridruživanja originalne funkcije $f(x)$ Laplaceovom transformatu $F(s)$ uporaba tablica inverznih Laplaceovih transformacija. Ako funkcija $F(s)$ nije tabličnog oblika, prethodnom se prikladnom algebarskom obradom dovede u takav oblik. Neka osnovna svojstva Laplaceovih transformacija navedena su u Tablici B1, a originalne funkcije $f(x)$ pridružene nekim Laplaceovim transformatima $F(s)$ navedene su u Tablici B2.

Primjer B1

Neka se pretpostavi homogen Markovljev proces s dva moguća stanja, označena s 1 i 2. Nadalje, neka se pretpostavi da su poznate učestalosti prijelaza između stanja procesa, odnosno q_{12} i q_{21}, te da se u trenutku t=0 taj proces nalazi u stanju 1. Treba odrediti vjerojatnost stanja 1 i stanja 2 tog procesa u trenutku isteka t jedinica vremena nakon toga.

Rješenje

Vjerojatnosti stanja promatranog procesa u trenutku *t,* odnosno $P_1(t)$ i $P_2(t)$, rješenja su Kolmogorovljeva sustava diferencijalnih jednadžbi skraćeno prikazanog u obliku

$$(P_1'(t), P_2'(t)) = (P_1(t), P_2(t))\begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{bmatrix}$$

iz čega proizlazi da je

$$P_1'(t) = q_{11}P_1(t) + q_{21}P_2(t)$$
$$P_2'(t) = q_{12}P_1(t) + q_{22}P_2(t)$$

Budući da proces ima samo dva stanja, pri čemu je $P_2(t) = 1 - P_1(t)$ odnosno q_{12} = - q_{21}, diferencijalna jednadžba za određivanje $P_1(t)$ poprima oblik

$$P_1'(t) + (q_{12} + q_{21})P_1(t) = q_{21}$$

Laplaceova transformacija ove diferencijalne jednadžbe oblika je

$$sP_1^*(s) - P_1(0) + (q_{12} + q_{21})P_1^*(s) = \frac{q_{21}}{s}$$

pri čemu je $P_1^*(s)$ Laplaceov transformat vremenske funkcije $P_1(t)$

Uzimajući u obzir da je $P_1(0) = 1$, dobiva se da je

$$P_1^*(s) = \frac{s + q_{21}}{s(s + q_{12} + q_{21})}$$

Budući da Laplaceov transformat $P_1^*(s)$ u ovom obliku nije prikladan za izravno tablično određivanje originalne funkcije, odnosno funkcije $P_1(t)$, desna strana ove jednadžbe rastavlja se na parcijalne razlomke oblika

$$\frac{s + q_{21}}{s(s + q_{12} + q_{21})} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + q_{12} + q_{21}}$$

iz čega proizlazi da je

$$s + q_{21} = (A + B)s + A(q_{12} + q_{21})$$

odnosno

$$A + B = 1$$
$$A(q_{12} + q_{21}) = q_{21}$$

Iz ovog sustava jednadžbi proizlazi da je

$$A = \frac{q_{21}}{q_{12} + q_{21}}$$

$$B = \frac{q_{12}}{q_{12} + q_{21}}$$

Prema tome, izraz za $P_1^*(s)$ može se prikazati u obliku

$$P_1^*(s) = \frac{\frac{q_{21}}{q_{12}+q_{21}}}{s} + \frac{\frac{q_{12}}{q_{12}+q_{21}}}{s+q_{12}+q_{21}}$$

Inverzna Laplaceova transformacija ovog izraza daje izraz za $P_1(t)$. On je oblika

$$P_1(t) = \frac{q_{21}}{q_{12}+q_{21}} + \frac{q_{12}}{q_{12}+q_{21}}\, e^{-(q_{12}+q_{21})t}$$

Iz $P_2(t) = 1 - P_1(t)$ proizlazi da je izraz za $P_2(t)$ oblika

$$P_2(t) = \frac{q_{12}}{q_{12}+q_{21}} - \frac{q_{12}}{q_{12}+q_{21}}\, e^{-(q_{12}+q_{21})t}$$

Tablica B1: Neka osnovna svojstva Laplaceovih transformacija

Svojstvo		Domena originala	Domena transformata
B1.1	Linearnost	$a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x)$	$a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s)$
B1.2	Promjena skale	$af(ax),\ a > 0$	$F\left(\frac{s}{a}\right)$
B1.3	Pomak	$e^{ax} f(x)$ $f(x-a)u(t-a),\ a > 0$	$F(s-a)$ $e^{-as} F(s)$
B1.4	Deriviranje	$\frac{d^n f(x)}{dx^n} = f^{(n)}(t)$ $(-1)^n x^n f(x)$	$s^n F(s) - s^{n-1} f(+0) - \ldots$ $\ldots - f^{(n-1)}(+0)$ $\frac{d^n F(s)}{ds^n}$
B1.5	Integriranje	$\int_0^x f(t)dt$ $\frac{f(x)}{x}$	$\frac{1}{s} F(s)$ $\int_s^\infty F(z)dz$
B1.6	Konvolucija $(f_1 * f_2)$	$\int_0^x f_1(t) f_2(x-t)dt$	$F_1(s) F_2(s)$
B1.7	Teorem o početnoj i konačnoj vrijednosti	$\lim_{x \to 0} f(x)$ $lim\ f(x)$	$\lim_{s \to \infty} sF(s)$ $\lim_{s \to 0} sF(s)$

Tablica B2: Originalne funkcije pridružene nekim Laplaceovim transformatima

Oznaka	Laplaceov transformat $F(s)$	Originalna funkcija $f(x)$
B2.1	1	*Impuls* $\delta(0)$
B2.2	$\frac{1}{s}$	*Jedinični skok u* $x=0$
B2.3	$\frac{1}{s^n},\ n=1,2,\ldots$	$\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$
B2.4	$\frac{1}{(s+a)^n},\ n=1,2,\ldots$	$\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}e^{-ax}$
B2.5	$\sum_{i=0}^{n}\frac{a^i}{(s+a)^{i+1}}$	$\sum_{i=0}^{n}\frac{(ax)^i e^{-ax}}{i!}$
B2.6	$\frac{1}{(s+a)^\beta},\ \beta>0$	$\frac{x^{\beta-1}e^{-ax}}{\Gamma(\beta)},\quad \beta=n\to\Gamma(\beta)=(n-1)!$
B2.7	$\frac{1}{(s+a)(s+b)},\ a\neq b$	$\frac{e^{-bx}-e^{-ax}}{a-b}$
B2.8	$\frac{s}{(s+a)(s+b)},\ a\neq b$	$\frac{ae^{-ax}-be^{-bx}}{a-b}$
B2.9	$\frac{1}{(s+a)(s+b)(s+c)},\ a\neq b\neq c$	$\frac{(c-b)e^{-ax}+(a-c)e^{-bx}+(b-a)e^{-cx}}{(a-b)(b-c)(c-a)}$
B2.10	$\frac{a}{s^2+\alpha^2}$	$\frac{1}{\alpha}sin(\alpha x)$
B2.11	$\frac{s}{s^2+\alpha^2}$	$cos(\alpha x)$
B2.12	$\frac{1}{(s+\beta)^2+\alpha^2}$	$\frac{1}{\alpha}e^{-\beta x}sin(\alpha x)$
B2.13	$\frac{s+\beta}{(s+\beta)^2+\alpha^2}$	$e^{-\beta x}cos(\alpha x)$
B2.14	$\frac{s}{(s^2+\alpha^2)^2}$	$\frac{1}{2\alpha}sin(\alpha x)$
B2.15	$\frac{P(s)}{Q(s)},\ Q(s)=\prod_{k=1}^{n}(s-a_k)$	$\sum_{k=1}^{n}\frac{P(a_k)}{Q'(a_k)}e^{a_k x},\quad Q'(a_k)=\frac{dQ(s)}{ds}\Big\vert_{s=a_k}$

LITERATURA

Birolini, A. (1999) *Reliability Engineering: Theory and Practice*. Berlin, Springer.

Ebeling, C. E. (1997) *An Introduction to Reliability and Maintainability Engineering*. New York, McGraw-Hill.

Elezović, N. (2010) *Matematika 3: Fourierov red i integral, Laplaceova transformacija.* Treće izdanje. Zagreb, Element.

Henley, E. J. i Kumamoto, H. (1981) *Realibility Engineering and Risk Assessment.* Englewood Cliffs, Prentice-Hall.

Høyland, A. i Rausand, M. (1994) *System Reliability Theory: Models and Statistical Methods.* New York, John Wiley & Sons.

Lewis, E. E. (1987) *Introduction to Reliability Engineering.* New York, John Wiley & Sons.

Pukite, J. i Pukite, P. (1998) *Modeling for Reliability Analysis: Markov Modeling for Reliability, Maintainability, Safety and Supportability Analyses of Complex Systems.* New York, IEEE Press.

Ross, S. M. (1983) *Stochastic Processes*. New York, John Wiley & Sons.

Trivedi, K. S. (1982) *Probability and Statistics with Reliability, Queuing and Computer Science Applications*. Englewood Cliffs, Prentice-Hall.

Villemeur, A. (1992) *Realibility, Availability, Maintainability and Safety Assessment*. Prvi svezak: *Methods and Techniques*. Chichester, John Wiley & Sons.

POPIS KRATICA SA ZNAČENJIMA

A	asimptotska raspoloživost jednokomponentnog sustava
A_S	asimptotska raspoloživost višekomponentnog sustava
A,B,C , …	događaji
$A(t)$	trenutačna raspoloživost komponente
$A_S(t)$	trenutačna raspoloživost sustava
$\overline{A}(t_1,t_2)$	intervalna raspoloživost
A^c	komplement događaja A
$A \cup B$	unija događaja A i B
$A \cap B$	presjek događaja A i B
$D[X]$	disperzija slučajne varijable X
$E[X]$	matematičko očekivanje slučajne varijable X
$F(x)$	funkcija razdiobe vjerojatnosti slučajne varijable X
$f(x)$	funkcija gustoće vjerojatnosti kontinuirane slučajne varijable X
$F(t)$	razdioba vremena do kvara komponente
$f(t)$	gustoća kvara komponente
$G(t)$	razdioba vremena do obnove komponente
$g(t)$	gustoća obnove komponente
$L\{F(x)\} = F^*(s)$	Laplaceova transformacija funkcije $F(x)$
$L^{-1}\{F^*(s)\} = F(x)$	inverzna Laplaceova transformacija funkcije $F^*(s)$
$M(t)$	obnovljivost komponente
$MTTF$	srednje vrijeme do kvara komponente
$MTTF_S$	srednje vrijeme do kvara sustava
$MTTR$	srednje vrijeme do obnove komponente
$\mathbf{0}$	redni vektor s n elemenata jednakih nuli
$P(A)$	vjerojatnost događaja A
$P(A \mid B)$	uvjetna vjerojatnost događaja A za dani događaj B
P_j	asimptotska vjerojatnost j-tog stanja slučajnog procesa
$P_j(t)$	vjerojatnost j-tog stanja slučajnog procesa u trenutku t
$P_j^*(s)$	Laplaceova transformacija vjerojatnosti funkcije $P_j(t)$
$\mathbf{P}(0)$	redni vektor početnih vjerojatnosti slučajnog procesa
$\mathbf{P}(t)$	redni vektor vjerojatnosti stanja slučajnog procesa u trenutku t

$P_j'(t)$	derivacija vjerojatnosti j-tog stanja slučajnog procesa u trenutku t
$P_j^*(s)$	Laplaceova transformacija vjerojatnosti funkcije $P_j(t)$
$\mathbf{P'}(\mathrm{t})$	redni vektor derivacija vjerojatnosti stanja slučajnog procesa u trenutku t
$P_{ij}(t)$	vjerojatnost prijelaza iz i-tog u j-to stanje slučajnog procesa u vremenu t
q	parametar eksponencijalne razdiobe kontinuirane slučajne varijable
q_{ij}	učestalost prijelaza iz i-tog u j-to stanje homogenog slučajnog procesa
$\mathbf{Q}$	kvadratna matrica učestalosti prijelaza između stanja slučajnog procesa
$\mathbf{Q_R}$	reducirana matrica učestalosti prijelaza između stanja slučajnog procesa
$R(t)$	pouzdanost komponente
$R_S(t)$	pouzdanost sustava
RBD	blok dijagram pouzdanosti neobnovljivog sustava
T_F	vrijeme do kvara komponente
T_R	vrijeme do obnove komponente
$\lambda(t)$	učestalost kvara komponente
λ	konstantna učestalost kvara komponente
λ_S	konstantna učestalost kvara sustava
$\mu(t)$	učestalost obnove komponente
μ	konstantna učestalost obnove komponente
σ_X	standardna devijacija slučajne varijable X
Ω	prostor elementarnih događaja
ω	elementarni događaj
$\emptyset$	nemoguć događaj

KAZALO POJMOVA